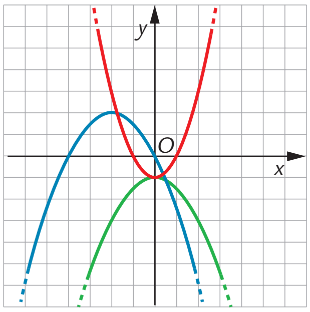
Unità 8 - Equazione di una parabola, posizione reciproca tra retta e parabola, area del segmento parabolico

1 Siano γ_1 e γ_2 due parabole aventi il *medesimo* fuoco F : dette r ed s, rispettivamente, le direttrici di γ_1 e γ_2, dimostra che, se γ_1 e γ_2 hanno qualche punto in comune, tali punti appartengono alle *bisettrici* delle rette r ed s.

2 Che cosa si può dire delle equazioni delle parabole disegnate nella figura qui a fianco?



- A Hanno tutte lo stesso coefficiente di x^2.
- B Hanno tutte lo stesso coefficiente di x.
- C Hanno tutte lo stesso termine noto.
- D Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motiva adeguatamente la risposta.

3 Discuti, al variare di k, il numero dei punti di intersezione fra la parabola di equazione $y = x^2$ e la retta di equazione: $x - ky - 1 = 0$. Specifica, in particolare, per quale valore di k la retta è tangente alla parabola.

4 Scrivi l'equazione della parabola, avente come asse la retta di equazione $y = 1$, passante per l'origine e per il punto $P(1, 1)$.

5 Data la parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 8$, determina i vertici del rettangolo inscritto nel segmento parabolico limitato dalla parabola e dall'asse x, avente il lato parallelo all'asse y doppio del lato parallelo all'asse x.

6 Considera le due parabole γ e γ' di equazioni:

$\gamma: y = x^2 - 3x$ e $\gamma': y = -x^2$

Determina la retta parallela all'asse y che interseca le due parabole γ e γ', rispettivamente, nei due punti P e Q tali che le tangenti a γ e γ' in P e Q sono fra loro parallele.

7 Scrivi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, che ha il vertice in $V(-1, 2)$ e passa per il punto $A(0, 4)$.

8 Determina l'area della regione di piano limitata dalle parabole di equazione $y = x^2 - 4x$ e $y = -x^2 + 6x$.

9 Scrivi l'equazione della parabola che ha fuoco in $F(1, 2)$ e come direttrice l'asse x.

10 Scrivi le equazioni delle tangenti comuni alle parabole di equazioni $y = x^2$ e $y = -2x^2 + 4x - 4$.

Le soluzioni sono alla pagina seguente

Soluzioni

1 Indichiamo con P un punto di intersezione di γ_1 e γ_2. Siano inoltre H e K le proiezioni di P rispettivamente sulle direttrici r ed s. Poiché P appartiene alla parabola γ_1, P deve essere equidistante dal suo fuoco e dalla sua direttrice, quindi deve essere $\overline{PF} = \overline{PH}$. Poiché P appartiene anche alla parabola γ_2, deve essere $\overline{PF} = \overline{PK}$. Ne segue che $\overline{PH} = \overline{PK}$ quindi P, essendo equidistante dalle rette r ed s, deve appartenere alle loro bisettrici.

2 Le parabole tracciate non possono avere tutte lo stesso coefficiente di x^2 poiché hanno concavità diversa; non possono avere lo stesso coefficiente di x perché due parabole sono simmetriche rispetto all'asse y (quindi $b = 0$), mentre la rimanente non lo è (quindi $b \neq 0$); non possono avere tutte lo stesso termine noto perché una di esse passa per l'origine (quindi $c = 0$) mentre le altre non passano per l'origine (quindi $c \neq 0$). La risposta esatta è **d**.

3 La retta è secante la parabola per $k < \frac{1}{4}$, tangente per $k = \frac{1}{4}$ ed esterna per $k > \frac{1}{4}$.

4 $x = -y^2 + 2y$

5 Vertici: $(-1+\sqrt{13}, 8-4\sqrt{13})$; $(-1+\sqrt{13}, 0)$; $(3-\sqrt{13}, 0)$; $(3-\sqrt{13}, 8-4\sqrt{13})$

6 $x = \frac{3}{4}$

7 $y = 2x^2 + 4x + 4$

8 $\frac{125}{3}$

9 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$

10 $y = 4x - 4$, $y = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{9}$