# Unità 9 - Equazione dell'ellisse, posizione reciproca tra retta ed ellisse

**1** Stabilisci per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ l'equazione $k^2x^2 + (3k - 2)y^2 = 1$ rappresenta:

**a.** una circonferenza;
**b.** un'ellisse con i fuochi sull'asse $x$;
**c.** un'ellisse con i fuochi sull'asse $y$.

**2** Illustra il ragionamento che permette di dedurre che l'area della regione di piano racchiusa da un'ellisse avente i semiassi di misura $a$ e $b$ è $\pi ab$. Determina quindi per quale valore di $k$, con $k > 0$, l'ellisse di equazione $k^2x^2 + 4y^2 = 1$ racchiude una regione di piano di area uguale a $6\pi$.

**3** Considera l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Determina quale relazione deve sussistere tra $a^2$ e $b^2$ affinché il raggio della circonferenza inscritta nel rombo i cui vertici sono i vertici dell'ellisse sia 1.

**4** Determina le rette tangenti all'ellisse di equazione $4x^2 + 9y^2 = 1$ parallele alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

**5** Scrivi l'equazione dell'ellisse avente come fuochi i punti di coordinate $(0, \pm 1)$ e di eccentricità uguale a $\frac{1}{2}$.

**6** Data l'ellisse di equazione $4x^2 + y^2 = 16$, scrivi l'equazione della circonferenza che ha come diametro l'asse maggiore dell'ellisse e individua le equazioni di una dilatazione che trasforma la circonferenza nell'ellisse.

**7** Scrivi l'equazione del luogo dei punti del piano tali che la somma delle distanze da $F_1(0, -3)$ ed $F_2(0, 3)$ è uguale a 12.

**8** Sia $\gamma$ una circonferenza di centro $C$ e raggio $r$ ed $F$ un punto interno a $\gamma$. Considera un punto $Q$ sulla circonferenza e indica con $P$ il punto di intersezione della retta $CQ$ e dell'asse di $QF$.
Dimostra che, comunque venga scelto $Q$, il punto $P$ appartiene a una stessa ellisse avente fuochi in $C$ e in $F$, specificando qual è la misura dell'asse maggiore di tale ellisse.

**9** Determina i vertici del rettangolo, con i lati paralleli agli assi cartesiani, circoscritto all'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 4$. Scrivi l'equazione della circonferenza circoscritta al rettangolo.

**10** Una sola delle seguenti ellissi ha come tangente, nel suo punto di ordinata $-1$ appartenente al terzo quadrante, una retta parallela alla retta passante per l'origine e per $P(1, -2)$. Individua quale, dando esauriente spiegazione della risposta.

**a.** $x^2 + 2y^2 = 3$ **b.** $2x^2 + y^2 = 3$ **c.** $4x^2 + 3y^2 = 7$ **d.** $3x^2 + 4y^2 = 7$

# Soluzioni

**1** **a.** $k = 1 \vee k = 2$; **b.** $1 < k < 2$; **c.** $\frac{2}{3} < k < 1 \vee k > 2$

**2** *Vedi* il Paragrafo 1; $k = \frac{1}{12}$

**3** $a^2b^2 = a^2 + b^2$

**4** $y = x \pm \frac{\sqrt{13}}{6}$

**5** $4x^2 + 3y^2 = 12$

**6** $x^2 + y^2 = 16$; $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = y \end{cases}$

**7** $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$

**8** Comunque venga scelto $Q$, risulta $\overline{PC} + \overline{PF} = \overline{PC} + \overline{PQ} = r$. Quindi $P$ appartiene all'ellisse avente fuochi in $C$ e in $F$, il cui asse maggiore misura $r$.

**9** $x^2 + y^2 = 5$

**10** Utilizzando le formule di sdoppiamento, si possono scrivere le equazioni delle rette tangenti alle ellissi nel loro punto del terzo quadrante di ordinata $-1$; si vede così che l'unica ellisse la cui tangente ha coefficiente angolare uguale a quello della retta $OP$ (cioè a $-2$) è **b**.