Prova intermedia di verifica - 1

Unità 11 - Coniche, tangenti e luoghi

1 Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera passante per $P(-1, -2)$ e riferita ai propri asintoti. Determina l'equazione della parabola con asse verticale passante per l'origine e per P, tangente all'iperbole.

2 Considera la parabola di equazione $y = ax^2 + c$, con $a \neq 0$ e $c > r$, e la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = r^2$. Dimostra che la circonferenza è *bitangente* alla parabola se e solo se $4a^2r^2 + 4ac + 1 = 0$ e $2ac + 1 < 0$.

3 Definisci che cos'è una conica e qual è l'equazione generale di una conica. Illustra quali posizioni reciproche possono presentare due coniche.

4 Nel fascio di parabole che passano per i punti di intersezione con l'asse x della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 3x + 2 = 0$, individua quelle che intersecano la circonferenza in altri due punti distinti.

5 Studia, al variare di k, la natura delle coniche del fascio di equazione:

$$(k-1)x^2 + (k+3)y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$$

6 Considera le rette r ed s di equazioni, rispettivamente, $2x - y = 0$ e $x - y = 0$. Sia t una retta parallela alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante che interseca r ed s in A e B. Determina, al variare di t, il luogo descritto dal punto medio di AB.

7 Scrivi l'equazione della parabola, avente come asse l'asse y, tangente all'ellisse di equazione $x^2 + 3y^2 = 4$, nel suo punto del primo quadrante di ascissa 1.

8 Considera la circonferenza γ: $x^2 + y^2 = 9$ e siano A e B i punti di intersezione di γ con l'asse x; scrivi l'equazione del luogo descritto dal *baricentro* del triangolo APB, al variare di P su γ.

9 Individua quale delle seguenti equazioni rappresenta una conica *degenere*, motivando adeguatamente la risposta. Poi rappresentala graficamente.

a. $xy - x + 2y - 3 = 0$
b. $x^2 - y^2 - 4x + 4 = 0$
c. $x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$
d. $y^2 - x - y + 2 = 0$

10 Scrivi l'equazione del luogo dei centri delle circonferenze passanti per $P(1, 0)$, tangenti *internamente* alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

Le soluzioni sono alla pagina seguente

Soluzioni

1 1. $xy = 2$; $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x$

2 L'equazione risolvente il sistema formato dalle equazioni della circonferenza e della parabola è $a^2x^4 + (2ac+1)x^2 + c^2 - r^2 = 0$. La parabola è bitangente alla circonferenza se e solo se l'equazione di secondo grado associata, ottenuta ponendo $x^2 = t$, ha due soluzioni reali coincidenti positive. Ciò equivale a imporre che il discriminante dell'equazione sia nullo e i coefficienti dell'equazione presentino due variazioni. Dalla condizione sul discriminante segue $4a^2r^2 + 4ac + 1 = 0$, da quella sui coefficienti segue $2ac + 1 < 0$ (osserva che il coefficiente di x^2 è sempre positivo e anche il termine noto lo è poiché per ipotesi $c > r$).

3 *Vedi* i Paragrafi 1-2.

4 $y = k(x^2 - 3x + 2)$, con $k < -2 \vee k > 2$

5 Iperboli per $-3 < k < 1$; parabole per $k = -3 \vee k = 1$; ellissi per $-\dfrac{7+\sqrt{65}}{2} \leq k < -3 \vee k > 1$

6 $7x - 5y = 0$

7 $y = -\dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{7}{6}$

8 $x^2 + y^2 = 1$

9 La conica degenere è la **b** ed è rappresentata dall'unione delle rette di equazioni $y = x - 2$ e $y = -x + 2$.

10 $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{4}{3}y^2 = 1$