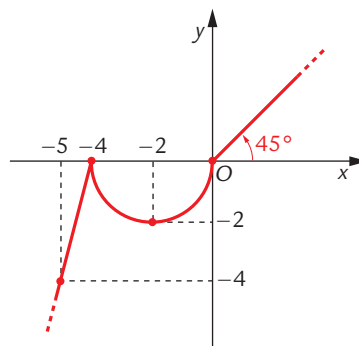


Unità 7 - Posizione reciproca di due circonferenze, fasci e applicazioni alle funzioni

- 1** Verifica che le due circonferenze aventi equazioni $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ e $x^2 + y^2 + 6x - 22y + 5 = 0$ sono *tangenti esternamente* e determina l'equazione della tangente nel loro punto di contatto.
- 2** Definisci che cos'è un fascio generato da due circonferenze e descrivi le caratteristiche del fascio, al variare dei punti base. Fornisci l'esempio di un fascio di circonferenze che ha *due* punti base.
- 3** Tra le seguenti coppie di circonferenze, una sola è formata da circonferenze *secanti*. Individua quale, dandone esauriente spiegazione.
- a. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$
b. $x^2 + y^2 - 4 = 0$ $x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$
c. $x^2 + y^2 - 4 = 0$ $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$
d. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$ $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$
- 4** Scrivi l'equazione del fascio di circonferenze tangenti alla retta r di equazione $y = 2x - 4$ nel punto P in cui r interseca l'asse x . Determina le equazioni delle circonferenze del fascio di raggio $\sqrt{5}$.
- 5** Scrivi l'equazione della circonferenza passante per l'origine e per i punti di intersezione delle circonferenze di equazioni:
 $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$
 $x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1 = 0$
- 6** Data l'equazione $x^2 + y^2 + (k+4)x - (k+4)y + 4 = 0$, determina per quali valori di k essa rappresenta una circonferenza e studia le caratteristiche del fascio da essa definito.
Stabilisci se esiste una circonferenza del fascio il cui centro appartiene alla retta di equazione $x - y + 2 = 0$.
- 7** Dimostra che l'asse radicale di due circonferenze è perpendicolare alla retta dei centri.
- 8** Un trapezio isoscele, circoscritto a una circonferenza, ha perimetro 24. Indica con y la misura del raggio della circonferenza inscritta nel trapezio e con $2x$ la misura della base maggiore del trapezio. Esprimi y in funzione di x e traccia il grafico della funzione ottenuta.
- 9** Traccia il grafico della funzione $y = \sqrt{3 + 2x - x^2}$ e, utilizzando tale grafico, risolvi graficamente la disequazione $\sqrt{3 + 2x - x^2} \geq 3 - |x|$.
- 10** Scrivi l'equazione della funzione il cui grafico è disegnato nella seguente figura, sapendo che l'arco tracciato è un arco di circonferenza.



Soluzioni

1 La distanza tra i centri è $6\sqrt{5}$, uguale alla somma dei raggi, perciò le circonferenze sono tangenti esternamente;
 $y = \frac{1}{2}x$.

2 Vedi il Paragrafo 5.

3 c.

4 Il fascio ha equazione $x^2 + y^2 + (2k - 4)x - ky + 4 - 4k = 0$. Le circonferenze richieste sono $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$ e $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$.

5 $2x^2 + 2y^2 - 5x - 6y = 0$

6 $k \leq -4 - 2\sqrt{2} \vee k \geq -4 + 2\sqrt{2}$. Il fascio è privo di punti base, quindi si tratta di un fascio di circonferenze esterne. Imponendo che il centro di una circonferenza del fascio appartenga alla retta di equazione $x - y + 2 = 0$ si trova che deve essere $k = -2$, ma per questo valore di k l'equazione del fascio **non** rappresenta una circonferenza. La risposta è negativa.

7 Date due circonferenze rispettivamente di equazioni $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e $x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$, l'asse radicale ha equazione $(a - a')x + (b - b')y + c - c' = 0$. Se $b \neq b'$, il coefficiente angolare dell'asse radicale è $m = -\frac{a - a'}{b - b'}$ e il coefficiente angolare della retta dei

centri è $m' = \frac{-\frac{b'}{2} + \frac{b}{2}}{-\frac{a'}{2} + \frac{a}{2}} = \frac{b - b'}{a - a'}$; poiché $mm' = -1$, l'asse radicale e la retta dei

centri sono perpendicolari. Se $b = b'$, l'asse radicale è parallelo all'asse y e la retta

dei centri è parallela all'asse x , quindi anche in questo sono perpendicolari.

8 $y = \sqrt{6x - x^2}$.

9 Vedi la figura; $1 \leq x \leq 3$.

10 L'equazione della funzione di cui è tracciato il grafico è $y = \begin{cases} 4x + 16 & \text{se } x < -4 \\ -\sqrt{-x^2 - 4x} & \text{se } -4 \leq x \leq 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

