Unità 8 - Fasci di parabole, applicazioni alle funzioni, problemi di massimo e minimo

1 Scrivi l'equazione del fascio di parabole passanti per $A(-1, 2)$ e $B(0, 3)$. Determina le parabole del fascio tangenti alla retta di equazione $y = 4x + 2$.

2 Sia P un punto di ascissa x appartenente alla parabola di equazione $y = x^2$; indicate con H e K, rispettivamente, le proiezioni di P sull'asse x e sull'asse y, traccia il grafico della funzione f definita da $y = \overline{PH} - 2\overline{PK}$.

3 Utilizzando il metodo dei fasci, scrivi l'equazione della parabola passante per $A(0, 0)$ e per $B(6, 2)$ e tangente in B alla circonferenza di diametro AB.

4 Descrivi le caratteristiche delle parabole del fascio di parabole di equazione:

$$y = x^2 + ax - a + 1$$

e indica con P il suo punto base. Determina quale relazione deve sussistere fra i parametri a_1, a_2 affinché le parabole del fascio corrispondenti a tali valori del parametro abbiano nel punto P tangenti fra loro perpendicolari.

5 Siano A e B, rispettivamente, i punti di ascissa 0 e 2 appartenenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 5x + 6$. Determina il punto P sull'arco AB per cui è *massima* l'area del triangolo APB.

6 Traccia i grafici delle due funzioni $y = \sqrt{4 - 2x}$ e $y = |x + 2|$; utilizzando tali grafici, risolvi la disequazione $\sqrt{4 - 2x} \leq |x + 2|$.

7 Considera i fasci di parabole di equazioni:

a. $y = ax^2 - 3x + 5$
b. $y = x^2 - bx + 5$
c. $y = -kx^2 - 3kx + 5$
d. $y = x^2 - 3x + c$

Uno solo di essi è costituito da parabole congruenti e aventi la stessa concavità, tutte passanti per lo stesso punto. Individua quale, dandone esauriente spiegazione. Individua la parabola di tale fascio che ha come asse la retta di equazione $x = 10$.

8 Dimostra che due numeri aventi somma costante k hanno prodotto massimo quando sono uguali.

9 Scrivi l'equazione del fascio di parabole generato dalle parabole di equazione $y = x^2 + 1$ e $y = 2x^2 - 3$. Descrivi le caratteristiche delle parabole del fascio e determina l'equazione della parabola del fascio che passa per l'origine.

10 Traccia il grafico della funzione $y = \dfrac{|x^3 - 4x|}{x}$. Specifica il dominio e l'immagine della funzione.

Le soluzioni sono alla pagina seguente

Soluzioni

1 Il fascio ha equazione $y = kx^2 + (k+1)x + 3$; le parabole hanno equazioni $y = x^2 + 2x + 3$, $y = 9x^2 + 10x + 3$.

2 $y = x^2 - 2|x|$; *vedi* la **fig. a**.

3 $y = -\frac{5}{9}x^2 + \frac{11}{3}x$

4 Fascio di parabole congruenti e aventi la stessa concavità, passanti per $P(1, 2)$; $(a_1 + 2)(a_2 + 2) = -1$

5 $P(1, 2)$

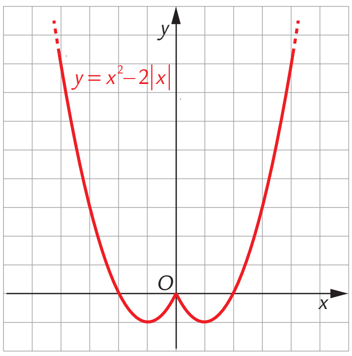
6 *Vedi la* **fig. b**; $x \leq -6 \vee 0 \leq x \leq 2$.

7 Sono da escludere i fasci **a** e **c** perché il coefficiente di x^2 contiene il parametro, quindi si ottengono parabole non tutte congruenti; le parabole del fascio **d** sono tutte congruenti e con la stessa concavità, ma non hanno punti in comune (il fascio è privo di punti base); la risposta esatta è **b** e la parabola del fascio che ha come asse $x = 10$ è quella che si ottiene per $b = 20$.

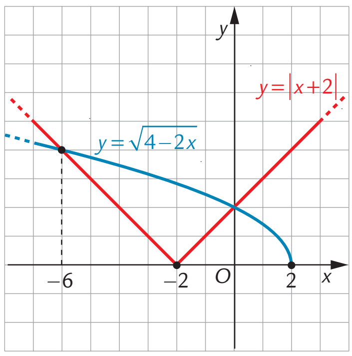
8 Sia x uno dei due numeri, allora l'altro è $k - x$; il loro prodotto è espresso dalla funzione $f(x) = x(k - x)$. Si tratta di una funzione di secondo grado, con la concavità rivolta verso il basso, il cui massimo è raggiunto in corrispondenza dell'ascissa del vertice, cioè per $x = \frac{k}{2}$. Se $x = \frac{k}{2}$, anche l'altro numero, $k - x$, è uguale a $\frac{k}{2}$.

9 $y - x^2 - 1 + k(y - 2x^2 + 3) = 0$; è costituito da parabole secanti nei due punti di coordinate $(-2, 5)$ e $(2, 5)$; $y = \frac{5}{4}x^2$.

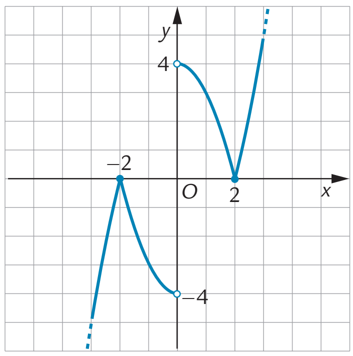
10 Il dominio della funzione è $\mathbf{R} - \{0\}$ e l'immagine è $\mathbf{R}$. *Vedi la* **fig. c**.



a



b



c