

Unità 9 - Ellissi traslate. Applicazioni alle funzioni

1 Una sola delle seguenti equazioni rappresenta una ellisse non degenera. Individua quale, dandone esauriente spiegazione, e rappresentala graficamente determinandone il centro, i vertici, i fuochi e l'eccentricità:

A $3x^2 + y^2 - 4y + 8 = 0$

B $9x^2 + 4y^2 + 36x - 16y + 16 = 0$

C $2x^2 + y^2 - 4x + 4 = 0$

D $x^2 + 2y^2 - 4y + 2 = 0$

2 Traccia il grafico delle funzioni $y = \sqrt{1 - 4x^2}$ e $y = |x|$. Utilizzando tali grafici, risolvi graficamente la disequazione $\sqrt{1 - 4x^2} > |x|$.

3 Determina a e b in modo che la funzione $y = \sqrt{ax + b - 4x^2}$ abbia come dominio l'intervallo $[-2, 4]$. Traccia quindi il grafico della funzione ottenuta in corrispondenza di questi valori di a e b .

4 Discuti, al variare di k reale, il numero delle soluzioni dell'equazione $\sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} = kx - 6k + 3$.

5 Scrivi l'equazione dell'ellisse avente due vertici nei punti $A(-4, 2)$ e $B(4, 2)$ e fuochi nei due punti di coordinate $(\pm 2\sqrt{3}, 2)$.

6 Stabilisci per quali valori di k reale l'equazione $x^2 + 4y^2 - 2kx - 2y + 1 = 0$ rappresenta un'ellisse non degenera.

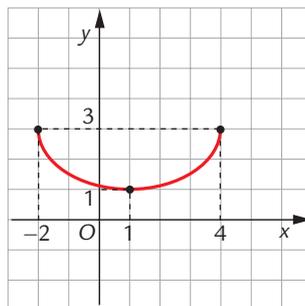
7 Traccia il grafico della funzione

$$y = 1 - 2\sqrt{1 + 3\left|\frac{x}{2}\right|} - x^2$$

specificandone dominio e immagine.

8 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = 2\sqrt{4 + 3x - x^2}$ nel suo punto di intersezione con l'asse y .

9 Scrivi l'equazione della funzione che ha come grafico la semiellisse rappresentata in figura.



10 Dato un settore circolare AOB di centro O , raggio 2 e ampiezza 90° , sia P un punto dell'arco e siano H e K le proiezioni di P sui raggi OA e OB . Sia S il punto in cui PK incontra la corda AB e T il punto in cui PH incontra la corda AB . Indica con x la distanza di P dal raggio OA e con y la somma delle aree dei triangoli BKS , HTA , OPA e OKA . Esprimi y in funzione di x e traccia il grafico della funzione ottenuta, mettendo in evidenza il tratto relativo al problema.

Soluzioni

1 Solo l'equazione b rappresenta un'ellisse non degenera; centro: $(-2, 2)$; vertici: $(-4, 2)$, $(0, 2)$, $(-2, -1)$, $(-2, 5)$; fuochi: $(-2, 2 \pm \sqrt{5})$; eccentricità = $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

2 $-\frac{\sqrt{5}}{5} < x < \frac{\sqrt{5}}{5}$

3 $a = 8$; $b = 32$; vedi la fig. a.

4 Se $k < 0$: nessuna soluzione; se $0 \leq k \leq \frac{1}{4}$: due soluzioni (coincidenti per $k = 0$); se $k > \frac{1}{4}$: una soluzione

5 $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

6 $k < -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee k > \frac{\sqrt{3}}{2}$

7 Vedi la fig. b. Dominio = $[-2, 2]$; immagine = $[-\frac{3}{2}, 1]$.

8 $y = \frac{3}{2}x + 4$

9 $y = 3 - \frac{2}{3}\sqrt{-x^2 + 2x + 8}$

10 $y = 6 - 2\sqrt{4 - x^2}$; il grafico della funzione è una semiellisse e l'arco che rappresenta il problema geometrico è quello definito dalla condizione: $0 \leq x \leq 2$.

