Problemi geometrici che hanno come modello sistemi parametrici misti

Discussione di un problema con parametro

Alcuni problemi, per essere espressi nel modo più generale possibile, contengono un *parametro*. In questi casi occorre *discutere* il problema, cioè stabilire, al variare del parametro, l'esistenza e il numero delle sue soluzioni. Per risolvere questi problemi seguiremo lo stesso schema logico che abbiamo seguito nel volume; l'unica differenza sarà che il modello algebrico del problema, anziché essere un'equazione o una disequazione da risolvere, oppure una funzione di cui tracciare il grafico, sarà un *sistema parametrico misto*, che dovremo discutere secondo i metodi visti nel volume, Unità 11.

PROBLEMA SVOLTO 1 ››› Geometria

In un triangolo rettangolo ABC, i due cateti AB e AC misurano, rispettivamente, 4 e 2.
Determinare un punto P, sull'ipotenusa BC, in modo che sia verificata la relazione:

$$\overline{PM}^2 + \overline{PH}^2 = k$$

essendo M il punto medio di AC e H la proiezione di P su AB.
Discutere il problema rispetto al parametro k.

FIGURA E SCELTA DELL'INCOGNITA

Costruiamo una figura (**fig. 1**) e osserviamo che il punto P resta individuato in modo *univoco* una volta nota, per esempio, la distanza di P da AB. Poniamo allora $\overline{PH} = x$.

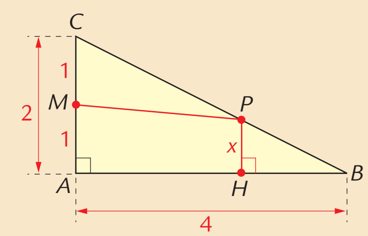


Figura 1

LIMITI GEOMETRICI DELL'INCOGNITA

Al variare di P su BC, la misura di PH può variare tra 0 e 2.
Analizziamo i due casi *limite* in cui $x = 0$ e $x = 2$, corrispondenti, rispettivamente, al caso in cui $P \equiv B$ e $P \equiv C$:

- se $P \equiv B$ (**fig. 2**), allora $\overline{PM} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$ e $\overline{PH} = 0$, quindi $\overline{PM}^2 + \overline{PH}^2 = 17$; questo caso limite si ottiene dunque per $k = 17$;
- se $P \equiv C$ (**fig. 3**), allora $\overline{PM} = \overline{CM} = 1$ e $\overline{PH} = \overline{CA} = 2$, quindi $\overline{PM}^2 + \overline{PH}^2 = 5$; questo caso limite si ottiene dunque per $k = 5$.

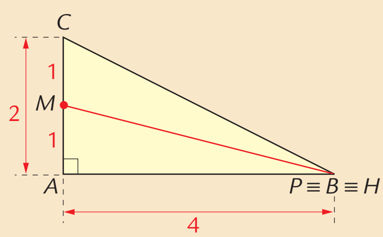


Figura 2

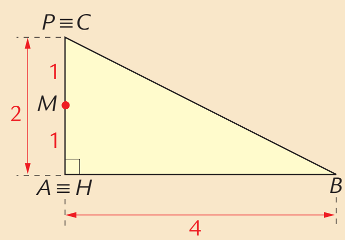


Figura 3

Poiché anche nei due casi limite è ben definito il valore di $\overline{PM}^2 + \overline{PH}^2$, accettiamo i due casi limite e assumiamo come dominio dell'incognita l'intervallo:

$$0 \le x \le 2$$

ESPRESSIONE DEL SISTEMA MISTO CHE COSTITUISCE IL MODELLO DEL PROBLEMA

Per esprimere in funzione di x la relazione $\overline{PM}^2 + \overline{PH}^2 = k$ dobbiamo determinare soltanto la misura di PM perché abbiamo posto $\overline{PH} = x$. A tale scopo, tracciamo da P la perpendicolare PK ad AC (**fig. 4**) e cerchiamo di ricavare le misure di PK e MK, in modo da poter applicare il teorema di Pitagora al triangolo KPM.

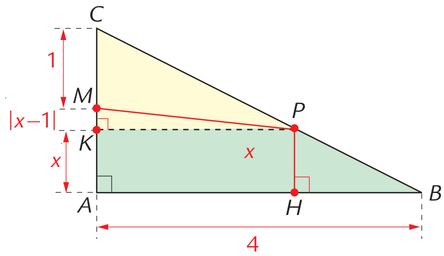


Figura 4

I triangoli ABC e KPC sono simili, quindi:

$$\overline{AB} : \overline{KP} = \overline{AC} : \overline{KC} \Rightarrow \overline{KP} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{KC}}{\overline{AC}} = 2(2 - x)$$

Inoltre:

$$\overline{MK} = \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \overline{MK} = |x - 1|$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo KPM, otteniamo allora:

$$\overline{PM}^2 = \overline{KP}^2 + \overline{MK}^2 = 4(2 - x)^2 + |x - 1|^2$$

La relazione $\overline{PM}^2 + \overline{PH}^2 = k$ si traduce perciò nell'equazione

$$\underbrace{4(2 - x)^2 + |x - 1|^2}_{\overline{PM}^2} + \underbrace{x^2}_{\overline{PH}^2} = k$$

Ponendo questa equazione a sistema con le limitazioni sull'incognita, otteniamo il sistema misto:

$$\begin{cases} 4(2 - x)^2 + |x - 1|^2 + x^2 = k \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 18x + 17 = k \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

DISCUSSIONE DEL SISTEMA MISTO

La discussione del sistema $\begin{cases} 6x^2 - 18x + 17 = k \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

si può ridurre per esempio alla discussione del sistema:

$$\begin{cases} y = 6x^2 - 18x + 17 \\ y = k \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

La discussione grafica porta ai risultati riassunti nella **fig. 5**, dalla quale appare chiaro che il sistema (e quindi il problema originario) ammette:

- due soluzioni per $\frac{7}{2} \leq k \leq 5$
- una soluzione per $5 < k \leq 17$

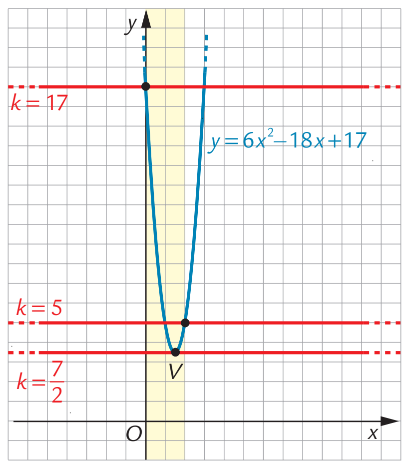


Figura 5

Nota I risultati della discussione si possono interpretare in modo più esplicito in relazione al problema geometrico come segue.

- Se $\frac{7}{2} \leq k \leq 5$, esistono due punti, appartenenti a BC, in corrispondenza dei quali si ha $\overline{PM}^2 + \overline{PH}^2 = k$; in particolare, se $k = \frac{7}{2}$ i due punti coincidono, mentre se $k = 5$ una delle due soluzioni coincide con il punto C.
- Se $5 < k \leq 17$, esiste un solo punto P, appartenente a BC, in corrispondenza del quale si ha $\overline{PM}^2 + \overline{PH}^2 = k$; in particolare, se $k = 17$, il punto P coincide con B.
- Se $k < \frac{7}{2} \vee k > 17$, non esiste alcun punto P su BC per cui si abbia $\overline{PM}^2 + \overline{PH}^2 = k$.

PROBLEMA SVOLTO 2 ››› Geometria analitica

Sia data la circonferenza avente centro in $C(-2, 0)$ e passante per l'origine; sulla semicirconferenza avente ordinate non negative, determinare un punto P in modo che la somma delle distanze di P dagli assi cartesiani sia k. Discutere il problema rispetto al parametro k.

FIGURA E SCELTA DELL'INCOGNITA

È facile ricavare che la circonferenza ha equazione $x^2+y^2+4x=0$.
Indicata con x l'ascissa di P, per esprimere l'ordinata di P in funzione di x occorrerebbe introdurre dei radicali. Sebbene anche questa strada sia percorribile, preferiamo impostare il problema con *due* incognite, l'ascissa e l'ordinata di P, in modo da non introdurre radicali. Poniamo cioè $P(x, y)$.
Indichiamo inoltre con H e K le proiezioni di P sull'asse x e sull'asse y, cosicché la relazione richiesta dal problema equivale a:

$$\overline{PH}+\overline{PK}=k$$

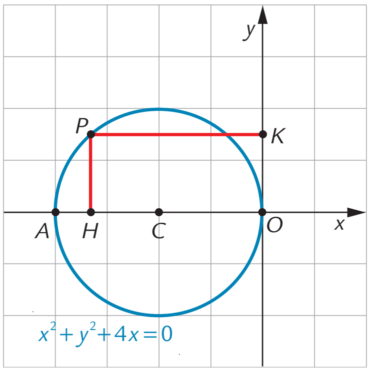


Figura 6

LIMITI GEOMETRICI DELL'INCOGNITA

Al variare di P sulla semicirconferenza avente ordinate non negative, l'ascissa di P assume valori compresi tra -4 e 0, mentre l'ordinata assume valori compresi tra 0 e 2. Esaminiamo i due casi limite, in cui P coincide con il punto A e con l'origine O.

- Se $P\equiv A$ (**fig. 7**), allora $\overline{PH}=0$ e $\overline{PK}=4$; la somma delle distanze dagli assi cartesiani è 4, quindi questo caso limite si ottiene quando $k=4$.
- Se $P\equiv O$ (**fig. 8**), allora $\overline{PH}=0$ e $\overline{PK}=0$; la somma delle distanze dagli assi cartesiani è nulla, quindi questo caso limite si ottiene quando $k=0$.

Figura 7

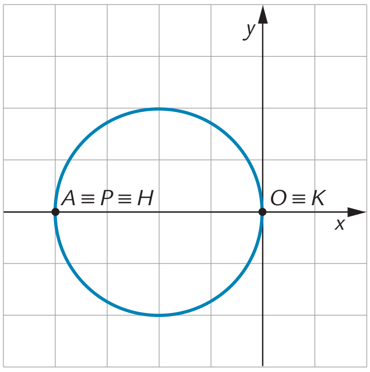
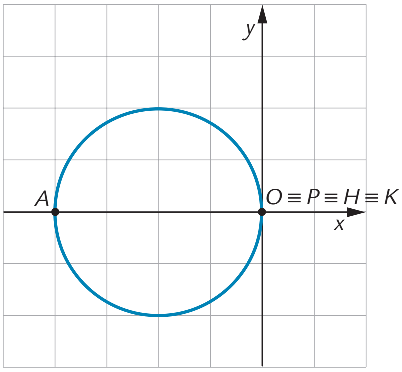


Figura 8



In entrambi i casi limite il valore della somma $\overline{PH}+\overline{PK}$ resta comunque ben definito, quindi accettiamo anche i casi limite e assumiamo come dominio per x e y gli intervalli:

$$-4\le x\le 0 \quad \text{e} \quad 0\le y\le 2 \qquad [1]$$

ESPRESSIONE DEL SISTEMA MISTO CHE COSTITUISCE IL MODELLO DEL PROBLEMA

Poiché P deve appartenere alla circonferenza, l'ascissa x e l'ordinata y di P devono soddisfare l'equazione:

$$x^2+y^2+4x=0 \qquad [2]$$

La seconda equazione che devono soddisfare x e y deriva dalla relazione richiesta dal problema:

$$\overline{PH}+\overline{PK}=k \qquad [3]$$

Per tradurre questa relazione in una equazione, esprimiamo in funzione di x e di y le distanze $\overline{PH}$ e $\overline{PK}$:

$\overline{PH}=|y|=y$ $\qquad |y|=y$ perché $0\le y\le 2$

$\overline{PK}=|x|=-x$ $\qquad |x|=-x$ perché $-4\le x\le 0$

Pertanto la **[3]** si traduce nell'equazione:

$$y+(-x)=k \qquad [4]$$

Ponendo a sistema le equazioni **[2]** e **[4]** con le limitazioni **[1]** otteniamo il sistema misto:

$$\begin{cases} x^2+y^2+4x=0 \\ y-x=k \\ -4\le x\le 0 \wedge 0\le y\le 2 \end{cases}$$

DISCUSSIONE DEL SISTEMA MISTO

La discussione grafica del sistema misto

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 0 \\ y - x = k \\ -4 \le x \le 0 \wedge 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

è riassunta in **fig. 9**.
Dalla figura possiamo dedurre che il problema ha:

- una sola soluzione per $0 \le k < 4$;
- due soluzioni per $4 \le k \le 2 + 2\sqrt{2}$.

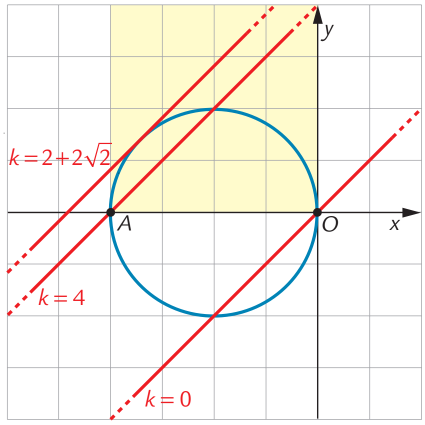


Figura 9

Nota I risultati della discussione si possono interpretare relativamente al problema come segue.

- Se $0 \le k < 4$, esiste un solo punto P appartenente alla semicirconferenza tale che la somma delle distanze dagli assi cartesiani sia k; in particolare, se $k = 0$, il punto P coincide con l'origine O.
- Se $4 \le k \le 2 + 2\sqrt{2}$, esistono due punti appartenenti alla semicirconferenza, tali che la somma delle distanze dagli assi cartesiani sia k; in particolare, se $k = 4$ uno dei due punti coincide con A, mentre se $k = 2 + 2\sqrt{2}$ i due punti coincidono.
- Se $k > 2 + 2\sqrt{2}$ non esiste alcun punto P, appartenente alla semicirconferenza, tale che la somma delle distanze dagli assi cartesiani sia k.

Deduzione, dalla discussione, del massimo o del minimo di una grandezza

La discussione di un problema permette di dedurre, in qualche caso, gli eventuali valori *massimi* o *minimi* che possono assumere alcune grandezze variabili coinvolte nel problema. Riflettiamo per esempio sui primi due problemi che abbiamo risolto come esempi.

- Nel **Problema 1** abbiamo discusso l'esistenza dei punti P su BC per cui $\overline{PM}^2 + \overline{PH}^2 = k$. Il valore minimo e il valore massimo assunti dalla somma $\overline{PM}^2 + \overline{PH}^2$ al variare di P su BC corrispondono, rispettivamente, al minimo e al massimo valore di k per cui il problema ha soluzione. In base ai risultati della discussione, possiamo concludere che la somma $\overline{PM}^2 + \overline{PH}^2$:
  - assume valore minimo, uguale a $\frac{7}{2}$, quando $x = \frac{3}{2}$;
  - assume valore massimo, uguale a 17, quando $x = 0$, cioè quando $P \equiv B$.
- Nel **Problema 2** abbiamo discusso l'esistenza dei punti P, appartenenti a una semicirconferenza, per cui la somma delle distanze dagli assi cartesiani è uguale a k. Il valore minimo e il valore massimo assunti dalla somma delle distanze dagli assi, al variare di P sulla semicirconferenza, corrispondono, rispettivamente, al minimo e al massimo valore di k per cui il problema ha soluzione. In base ai risultati della discussione, possiamo concludere che la somma $\overline{PH} + \overline{PK}$:
  - assume valore minimo, uguale a 0, nel caso limite in cui $P \equiv O$;
  - assume valore massimo, uguale a $2 + 2\sqrt{2}$, quando P è il punto di contatto fra la semicirconferenza e la retta tangente alla semicirconferenza (di equazione $y = x + 2 + 2\sqrt{2}$); si ricava così che il massimo della somma viene raggiunto quando $P(-\sqrt{2} - 2,\ \sqrt{2})$.

La ricerca del massimo o del minimo di una grandezza può comparire in un problema, senza che sia legata alla richiesta di discussione, come mostriamo nel prossimo problema.

PROBLEMA SVOLTO 3 ››› Un problema di minimo

Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, determinare i vertici del rettangolo di perimetro massimo, inscritto nell'ellisse.

Ti invitiamo a risolvere da solo questo esercizio, discutendo preliminarmente il problema: «Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, determinare i vertici del rettangolo di perimetro k, inscritto nell'ellisse» e deducendo dalla discussione il valore massimo del perimetro e i vertici del rettangolo corrispondente.

Suggerimento

Per la risoluzione del problema sull'ellisse, assumi come incognite l'ascissa e l'ordinata del vertice del rettangolo inscritto appartenente al *primo* quadrante.

Questo metodo può essere applicato solo nel caso in cui il modello algebrico del problema è un sistema di secondo grado o a esso riconducibile. Il problema generale della ricerca dei minimi e dei massimi di una grandezza verrà affrontato nel proseguimento del corso di matematica.

Problemi di geometria

1 Considera una semicirconferenza di centro O, diametro AB e raggio unitario. Siano C e D, rispettivamente, i punti medi di OA e OB. Determina la misura $2x$ di una corda EF, parallela ad AB, con E più vicino ad A che a B, in modo che la somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati del trapezio convesso $CEFD$ risulti uguale a $\frac{k+2}{2}$. Discuti il problema rispetto al parametro k.

$\left[\text{Si ottiene l'equazione } 8x^2 - 4x + 5 - k = 0 \text{ con le limitazioni } 0 \le x \le 1;\right.$
$\left.\text{due soluzioni per } \frac{9}{2} \le k \le 5, \text{ una soluzione per } 5 < k \le 9\right]$

2 Il triangolo rettangolo AOB ha i cateti OA e OB che misurano, rispettivamente, $4a$ e $2a$. Determina sull'ipotenusa AB un punto P in modo che risulti:

$$\overline{PH}^2 + \overline{PM}^2 = ka^2$$

essendo M il punto medio di OB e H la proiezione di P su OA. Discuti il problema rispetto al parametro k.

$\left[\text{Ponendo uguale a } x \text{ la distanza di } P \text{ da } OA \text{ si ottiene l'equazione } 6x^2 - 18ax + 17a^2 = ka^2,\right.$
$\left.\text{con le limitazioni } 0 \le x \le 2a; \text{ due soluzioni per } \frac{7}{2} \le k \le 5, \text{ una soluzione per } 5 < k \le 17\right]$

3 Considera una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2$. Determina su di essa un punto P tale che, detta Q la sua proiezione su AB, si abbia $\overline{AQ} + \overline{QP} = k$. Discuti il problema rispetto a k.

[Ponendo $\overline{AQ} = x$, si ottiene l'equazione $\sqrt{2x - x^2} = -x + k$, con le limitazioni $0 \le x \le 2$;
una soluzione per $0 \le k < 2$, due soluzioni per $2 \le k \le 1 + \sqrt{2}$]

4 Considera una circonferenza di diametro AB, centro O e raggio r. Sia P il punto medio del raggio OA. Determina sul raggio OB un punto Q tale che, condotta per esso la corda CD perpendicolare ad AB, la somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati del triangolo PCD sia $2\left(k + \frac{1}{4}\right)r^2$. Discuti il problema rispetto al parametro k.

$\left[\text{Ponendo } \overline{OQ} = x \text{ si ottiene l'equazione } 2x^2 - rx - 3r^2 + kr^2 = 0, \text{ con le limitazioni } 0 \le x \le r;\right.$
$\left.\text{una soluzione per } 2 \le k < 3, \text{ due soluzioni per } 3 \le k \le \frac{25}{8}\right]$

5 Inscrivi in un cerchio di raggio r un triangolo isoscele (non degenere), sapendo che la somma della base e dell'altezza del triangolo è kr. Discuti il problema rispetto al parametro k.

[Posta uguale a x la misura dell'altezza del triangolo relativa alla base, si ottiene l'equazione $2\sqrt{2rx - x^2} = -x + kr$,
con le limitazioni $0 < x < 2r$; una soluzione per $0 < k \le 2$, due soluzioni per $2 < k \le 1 + \sqrt{5}$]

6 Considera una semicirconferenza di centro O e raggio 1. Sia AB una corda della semicirconferenza e H il punto medio della corda. Determina la misura $2x$ della corda in modo che risulti $2\overline{AB} + 3\overline{OH} = k$. Discuti il problema rispetto al parametro k.

[Si ottiene l'equazione $3\sqrt{1 - x^2} = -4x + k$, con le limitazioni $0 \le x \le 1$;
una soluzione per $3 \le k < 4$, due soluzioni per $4 \le k \le 5$]

7 Sopra l'arco $\overset{\frown}{AB}$, quarta parte di una circonferenza di centro O e raggio $2a$, determina un punto P tale che, detti M ed N rispettivamente i punti medi di OA e OB, l'area del quadrilatero $MONP$ sia ka^2. Discuti il problema rispetto al parametro k.

[Ponendo uguale a x la distanza di P da OB, si ottiene l'equazione $\sqrt{4a^2 - x^2} = -x + 2ka$,
con le limitazioni $0 \le x \le 2a$; due soluzioni per $1 \le k \le \sqrt{2}$]

8 Sia ABC un triangolo equilatero il cui lato misura 1 e sia E un punto sul lato AC. Condotta da E la parallela ad AB e indicato con F il suo punto di intersezione con BC, sia D il punto, appartenente al prolungamento di EF dalla parte di F, tale che $\overline{FD} = \frac{1}{2}\overline{EF}$.
Determina il punto E in modo che si abbia $\overline{MD}^2 + \overline{BD}^2 = k$, essendo M il punto medio di AB.
Discuti il problema rispetto al parametro k.
Determina quindi la posizione di E in modo che $ABDE$ risulti un trapezio rettangolo o un parallelogramma.

[Ponendo $\overline{CE} = x$ si ottiene l'equazione $14x^2 - 16x + 7 - 4k = 0$ con $0 \le x \le 1$; due soluzioni per $\frac{17}{28} \le k \le \frac{5}{4}$, una soluzione per $\frac{5}{4} < k \le \frac{7}{4}$; si ha un trapezio rettangolo per $x = \frac{1}{2}$ e un parallelogramma quando $x = \frac{2}{3}$]

9 Inscrivi in una semicirconferenza di diametro AB e raggio 1 un trapezio isoscele $ABCD$ (non degenere), sapendo che la somma delle misure della base minore e dell'altezza del trapezio è k. Discuti il problema rispetto al parametro k.

[Ponendo $\overline{DC} = 2y$ e $\overline{CH} = x$, dove H è la proiezione di C su AB, si ottiene il sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = -\frac{x}{2} + \frac{k}{2} \\ 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1 \end{cases}$ che ha una soluzione per $1 < k \le 2$ e due soluzioni per $2 < k \le \sqrt{5}$]

10 In una semicirconferenza di diametro AB e raggio 1 traccia una corda CD (con C più vicino a B che ad A) e indica con E il punto di intersezione dei prolungamenti di AD e BC.
Determina la corda CD in modo che il triangolo ABE sia non degenere e abbia perimetro $2k$. Discuti il problema rispetto al parametro k.

[Ponendo $\overline{AD} = x$, $\overline{CD} = 2y$ si ottiene il sistema: $\begin{cases} y = 1 - \frac{1}{2}x^2 \\ 2x - 2y + 2 + k(y-1) = 0 \\ 0 < x < \sqrt{2} \wedge 0 < y < 1 \end{cases}$; 1 soluzione per $k > 2 + 2\sqrt{2}$]

11 Considera il triangolo AOB, rettangolo in O, nel quale il cateto OA misura 1 e il cateto OB misura 2. Determina sull'ipotenusa un punto P in modo che, detta Q la sua proiezione ortogonale su OA, si abbia $\overline{OP} + \overline{PQ} = k$. Discuti il problema rispetto al parametro k.

[Ponendo $\overline{PQ} = x$, si ottiene l'equazione $\sqrt{5x^2 - 4x + 4} = -2x + 2k$ con $0 \le x \le 2$; una soluzione per $1 \le k \le 4$]

12 Considera un settore circolare AOB, di centro O e raggio 2, tale che $A\hat{O}B = 90°$. Indica con M il punto medio del raggio OA e determina sull'arco $\overparen{AB}$ un punto P in modo che, dette H e K, rispettivamente, le proiezioni di P sui raggi OA e OB, sia verificata la relazione: $\overline{PM}^2 + \overline{PK}^2 = k \cdot \overline{PH}^2$. Discuti il problema rispetto al parametro k.

[Ponendo $\overline{PK} = x$, si ottiene l'equazione $(k+1)x^2 - 2x + 5 - 4k = 0$, con le limitazioni $0 \le x \le 2$; due soluzioni per $\frac{1+\sqrt{65}}{8} \le k \le \frac{5}{4}$, una soluzione per $k > \frac{5}{4}$]

13 Considera un settore circolare AOB, di centro O e raggio unitario, tale che $A\hat{O}B = 60°$. Inscrivi nel settore un rettangolo (non degenere) avente un lato sul raggio OA e perimetro $2k$. Discuti il problema rispetto al parametro k.

[Ponendo uguale a x la misura del lato perpendicolare a OA, si ottiene l'equazione $\sqrt{1-x^2} = \frac{x}{\sqrt{3}} + k - x$ con $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; una soluzione per $\frac{\sqrt{3}}{2} < k \le 1$, due soluzioni per $1 < k \le \sqrt{\frac{7-2\sqrt{3}}{3}}$]

14 Considera un triangolo ABC in cui $\overline{AB} = 13$, $\overline{BC} = 14$, $\overline{CA} = 15$ e traccia la circonferenza in esso inscritta. Determina una retta r parallela al lato BC in modo che, dette MN e PQ le corde che la retta r individua, rispettivamente, sul triangolo e sulla circonferenza, si abbia $\overline{PQ} + \frac{6}{7}\overline{MN} = k$. Discuti il problema rispetto al parametro k.

[Nel triangolo ABC il raggio della circonferenza inscritta misura 4 e l'altezza relativa a BC misura 12; ponendo uguale a x la distanza tra la retta r e BC si ottiene l'equazione $\sqrt{8x - x^2} = \frac{x}{2} - 6 + \frac{k}{2}$ con le limitazioni $0 \le x \le 8$; una soluzione per $4 \le k < 12$ e due soluzioni per $12 \le k \le 8 + 4\sqrt{5}$]

ESERCIZI

15 Dato un angolo retto $a\widehat{O}b$, siano A e B due punti, appartenenti rispettivamente alle semirette a e b, tali che $\overline{OA} = \overline{OB}\sqrt{3}$. Determina un punto P, interno all'angolo retto, in modo che $O\widehat{P}A$ sia retto e che risulti $\overline{OP}^2 + \overline{PB}^2 = k \cdot \overline{OB}^2$. Discuti il problema rispetto al parametro k.

(*Suggerimento*: riferisci il problema a un sistema di riferimento cartesiano ortogonale rispetto al quale $A(\sqrt{3}, 0)$ e $B(0, 1)$.

[Ponendo $P(x, y)$, si ottiene il sistema $\begin{cases} (x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + y^2 = \frac{3}{4} \\ x^2 + y^2 - y + \frac{1-k}{2} = 0 \\ x > 0 \wedge y > 0 \end{cases}$, che ammette una soluzione per $1 \leq k < 7$ e due soluzioni per $2(2-\sqrt{3}) \leq k < 1$]

16 Siano dati l'angolo $M\widehat{O}N = 150°$ e il punto A, appartenente alla semiretta opposta al lato OM, tale che $\overline{OA} = 1$. Determina un punto P interno all'angolo dato in modo che, indicata con Q la sua proiezione ortogonale sulla retta MA, siano verificate le relazioni:

$$\overline{OA} + 2\overline{OQ} = 2\sqrt{3}\,\overline{PQ} \quad \text{e} \quad \overline{OP}^2 + \overline{AP}^2 = k\overline{OA}^2$$

Discuti il problema rispetto al parametro k.

(*Suggerimento*: riferisci la figura a un sistema di assi cartesiani ortogonali in cui O coincide con l'origine, $A(-1, 0)$ e il punto N ha ordinata positiva).

[Ponendo $P(x, y)$, si ottiene il sistema $\begin{cases} 1 + 2|x| = 2\sqrt{3}y \\ 2x^2 + 2y^2 + 2x + 1 - k = 0 \\ y > 0 \wedge y > -\frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$, che ammette due soluzioni per $k \geq 1$]

17 In un trapezio $ABCD$, rettangolo in A e D, le basi AB e CD misurano rispettivamente 5 e 4, mentre l'altezza AD misura 2. Determina un punto P, interno al trapezio, in modo che, indicate con H e K le sue proiezioni ortogonali su BC e AD, siano soddisfatte le relazioni:

$$PH : PK = AD : BC \quad \text{e} \quad \overline{AP}^2 + \overline{DP}^2 = k$$

Discuti il problema rispetto al parametro k.
(*Suggerimento*: riferisci la figura a un sistema di riferimento rispetto al quale $A(0, 0)$, $B(5, 0)$, $C(4, 2)$, $D(0, 2)$).

[Ponendo $P(x, y)$, si ottiene il sistema $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 4y + 4 - k = 0 \\ 4x + y - 10 = 0 \\ 2 < x < \frac{5}{2} \wedge 0 < y < 2 \end{cases}$; due soluzioni per $\frac{196}{17} \leq k < 12$, una soluzione per $12 \leq k < \frac{33}{2}$]

18 Internamente al quadrato $ABCD$, il cui lato misura 1, determina un punto P tale che la sua distanza dal vertice D sia doppia di quella dal vertice B, e che risulti uguale a k il rapporto delle sue distanze dai due lati AB e AD. Discuti il problema rispetto al parametro k.
(*Suggerimento*: riferisci la figura a un sistema di assi cartesiani rispetto al quale $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$, $D(0, 1)$).

[Ponendo $P(x, y)$, si ottiene il sistema: $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 8x + 2y + 3 = 0 \\ y = kx \\ 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1 \end{cases}$, che ammette una soluzione per $0 < k \leq \frac{\sqrt{7}-1}{3}$ e due soluzioni per $\frac{\sqrt{7}-1}{3} < k \leq \frac{3\sqrt{2}-2}{4}$]

Problemi di geometria analitica

19 Traccia il grafico della parabola di equazione:

$$y = x^2 - 6x + 8$$

dopo averne determinato i punti di intersezione A e B con l'asse x (con $x_A < x_B$) e il punto di intersezione C con l'asse y. Verifica che la tangente in A alla parabola è parallela alla retta BC e calcola l'ordinata del punto T in cui tale tangente interseca l'asse y. Determina un punto P sull'arco AC in modo che il quadrilatero $PROM$ sia non degenere e abbia area k, essendo O l'origine, M il punto medio di OA ed R il punto medio di OT. Discuti il problema rispetto al parametro k.

[Una soluzione per $2 < k < 4$]

ESERCIZI

20 Dopo aver tracciato il grafico della parabola di equazione $y = 1 - x^2$, inscrivi nel segmento parabolico determinato dalla curva e dall'asse x un rettangolo (non degenere) con i lati paralleli agli assi cartesiani di perimetro $2p$. Discuti il problema rispetto al parametro p. [Una soluzione per $1 < p < 2$]

21 Scritta l'equazione della parabola di vertice $A(1, 0)$, asse parallelo all'asse y e passante per $B(0, 2)$, determina sull'arco $\widehat{AB}$ un punto P, tale che la somma delle distanze di P dagli assi sia uguale a k. Discuti il problema rispetto al parametro k. $\left[y = 2x^2 - 4x + 2;\ \text{due soluzioni per } \frac{7}{8} \leq k \leq 1,\ \text{una soluzione per } 1 < k \leq 2\right]$

22 È data la circonferenza γ avente centro in $C(2, 0)$, passante per l'origine. Sull'arco di γ avente ordinate non positive, determina un punto P in modo che la somma delle distanze di P dagli assi cartesiani sia uguale a k. Discuti il problema rispetto al parametro k. [Una soluzione per $0 \leq k < 4$; due soluzioni per $4 \leq k \leq 2 + 2\sqrt{2}$]

23 Sono date le due circonferenze γ_1, avente centro in $C_1(-2, 0)$ e raggio 2, e γ_2, avente centro in $C_2(1, 1)$ e raggio 1. Determina una retta parallela all'asse x che interseca γ_1 in A e B e γ_2 in C e D, in modo che sia verificata la relazione:

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4k$$

Discuti il problema rispetto al parametro k. $\left[\text{Una soluzione per } 0 \leq k < 4;\ \text{due soluzioni per } 4 \leq k \leq \frac{9}{2}\right]$

24 Data la parabola di equazione $x = y^2 - 4$, sia A il suo punto di intersezione con l'asse x e B il suo punto di intersezione con il semiasse negativo delle y. Sull'arco $\widehat{AB}$ determina un punto P in modo che risulti:

$$\overline{PH} + \sqrt{17}\ \overline{PK} = k$$

essendo H la proiezione di P sull'asse x e K la proiezione di P sulla tangente alla parabola in B. Discuti il problema rispetto al parametro k. $\left[\text{Due soluzioni per } \frac{7}{4} \leq k \leq 2,\ \text{una soluzione per } 2 < k \leq 4\right]$

25 Considera la circonferenza avente equazione $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ e determina un punto $P(x, y)$ sull'arco di circonferenza per cui $x \geq 0 \wedge y \geq 0$, tale che $kx - y - 6k = 0$. Discuti il problema rispetto al parametro k.

$\left[\text{Due soluzioni per } -\frac{3\sqrt{7}}{7} \leq k \leq -\frac{\sqrt{5}}{6};\ \text{una soluzione per } -\frac{\sqrt{5}}{6} < k \leq 0\right]$

26 Inscrivi nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ un rettangolo (non degenere) di perimetro $2k$ con i lati paralleli agli assi cartesiani. Discuti il problema rispetto al parametro k.

[Una soluzione per $2 < k \leq 4$; due soluzioni per $4 < k \leq 2\sqrt{5}$]

27 È data l'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 4$. Sull'arco di iperbole per cui $x \leq 0 \wedge y \geq 0$, determina un punto P in modo che sia $\overline{PH} + \sqrt{2}\ \overline{PK} = k$, essendo H la proiezione di P sull'asse y e K la proiezione di P sull'asintoto dell'iperbole di coefficiente angolare negativo. Discuti il problema rispetto al parametro k.

[Due soluzioni per $2\sqrt{3} \leq k \leq 4$; una soluzione per $k > 4$]