Dimostrazione del teorema 2.8

Limite di funzioni composte — **TEOREMA 2.8**

Siano f e g due funzioni componibili e definite in un intorno di x_0 (eccetto al più x_0); si voglia calcolare $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x))$.

Supponiamo che siano verificate le seguenti ipotesi:

a. $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$ e $\lim\limits_{t \to l} f(t) = L$ con x_0, l, $L \in \mathbf{R}^*$;

b. esiste un intorno di x_0 per ogni x del quale (con $x \neq x_0$) è $g(x) \neq l$.

Allora è anche:

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{t \to l} f(t) = L$$

DIMOSTRAZIONE

- Poiché $\lim\limits_{t \to l} f(t) = L$, per ogni intorno U di L esiste un intorno V_1 di l tale che:

  $f(t) \in U \quad$ per ogni $t \in V_1$ con $t \neq l$ [1]

- Poiché $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$, deve esistere un intorno V_2 di x_0 tale che:

  $g(x) \in V_1 \quad$ per ogni $x \in V_2$ con $x \neq x_0$

- Detto V_3 l'intorno di x_0 che esiste per l'ipotesi **b**, consideriamo $V_2 \cap V_3$; per ogni $x \in V_2 \cap V_3$, con $x \neq x_0$, risulta:

  $$\underbrace{g(x) \in V_1}_{\substack{\text{perché } x \in V_2 \\ \text{ed è } x \neq x_0}} \quad \text{e} \quad \underbrace{g(x) \neq l}_{\substack{\text{perché } x \in V_3 \\ \text{ed è } x \neq x_0}}$$

  quindi, per la [1], sarà:

  $f(g(x)) \in U$

- In definitiva, per ogni intorno U di L abbiamo trovato un intorno di x_0, $V_2 \cap V_3$, per ogni x del quale (eccetto al più x_0) risulta $f(g(x)) \in U$. Ciò equivale a dire che per $x \to x_0$ la funzione $f(g(x))$ tende a L.