PROVA DI VERIFICA
27A

Limiti di funzioni reali di variabile reale

Fila A	Cognome	Nome ....
Tempo:	Classe	Data ....

PROVE DI VERIFICA

Problema

Rispetto a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) considera le due funzioni:

$$f(x) = \frac{x-a}{ax+1} \qquad g(x) = ax^2 + \left(1-a^2\right)x - a \qquad \text{con } a \in \mathbf{R} - \{0\}$$

a. Determina per quali valori di a risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) < \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

b. Verifica che i grafici delle due funzioni date intersecano l'asse x nello stesso punto A e l'asse y nello stesso punto B, e determina le coordinate dell'ulteriore punto C di intersezione delle due curve.

c. Verifica che il triangolo ABC è rettangolo e calcola i seguenti limiti:

i. $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ **ii.** $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \frac{\text{Area}(ABC)}{\text{Area}(AOB)}$

d. Determina per quale valore di $a \in \mathbf{R}$ risulta:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{4}$$

e. In corrispondenza del valore positivo trovato per a, determina le misure d_1e d_2 dei due segmenti che hanno per estremi le intersezioni di ciascuna delle due curve rispettivamente con le rette $r_1 : x = k$ e $r_2 : x = -k$ e calcola i seguenti limiti:

i. $\displaystyle\lim_{k\to-1} \frac{d_1}{d_2}$ **ii.** $\displaystyle\lim_{k\to0} \frac{d_1}{d_2}$ **iii.** $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{d_1}{d_2}$

Quesiti

1 Calcola, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left[x^{\alpha}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\right]$.

2 Determina gli eventuali asintoti orizzontali e verticali della funzione $f(x) = 3^{\frac{2x-1}{1-x}}$.

3 Data la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+4}\sin 2x}{x}$ calcola:

a. $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x)$ **b.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$

4 Calcola $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(1+x^2\right)^{\frac{2}{1-\cos x}}$.

5 Calcola $\displaystyle\lim_{x\to2^+} \log_2(x-2)$ e verifica la sua esattezza utilizzando la corrispondente definizione di limite. Quale delle seguenti proposizioni esprime correttamente la definizione corrispondente?

A $\forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 : 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left|\log_2(x-2)\right| < \varepsilon$

B $\forall M > 0\ \exists\,\delta > 0 : 0 < x-2 < \delta \Rightarrow \log_2(x-2) < -M$

C $\forall M > 0\ \exists\,\delta > 0 : 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \log_2(x-2) < -M$

D $\forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 : 0 < x-2 < \delta \Rightarrow \left|\log_2(x-2)\right| < \varepsilon$

PROVA DI VERIFICA 27B

Limiti di funzioni reali di variabile reale

Fila B	Cognome	Nome ....
Tempo:	Classe	Data ....

Problema

Rispetto a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) considera le due funzioni:

$$f(x) = \frac{x+2a}{1-ax} \qquad g(x) = -ax^2 + (1-2a^2)x + 2a \qquad \text{con } a \in \mathbf{R} - \{0\}$$

a. Determina per quali valori di a risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) > \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

b. Verifica che i grafici delle due funzioni date intersecano l'asse x nello stesso punto A e l'asse y nello stesso punto B, e determina le coordinate dell'ulteriore punto C di intersezione delle due curve.

c. Verifica che il triangolo ABC è rettangolo e calcola i seguenti limiti:

i. $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AO}}$ **ii.** $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{\text{Area}\,(ABC)}{\text{Area}\,(AOB)}$

d. Determina per quale valore di $a \in \mathbf{R}$ risulta:

$$\lim_{x\to-2a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4}{9}$$

e. In corrispondenza del valore positivo trovato per a, determina le misure d_1 e d_2 dei due segmenti che hanno per estremi le intersezioni di ciascuna delle due curve rispettivamente con le rette $r_1 : x = k$ e $r_2 : x = -k$ e calcola i seguenti limiti:

i. $\lim\limits_{k\to-\infty} \dfrac{d_1}{d_2}$ **ii.** $\lim\limits_{k\to 0} \dfrac{d_1}{d_2}$ **iii.** $\lim\limits_{k\to 1} \dfrac{d_1}{d_2}$

Quesiti

1 Calcola, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^\alpha}{\sqrt{x+2}} \sin \dfrac{1}{x} \right)$.

2 Determina gli eventuali asintoti orizzontali e verticali della funzione $f(x) = \log_2 \dfrac{x}{2x+4}$.

3 Data la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x-2}-x}{4-2x}$ calcola:

a. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ **b.** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

4 Calcola $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{2}{\ln(1+x)}}$.

5 Calcola $\lim\limits_{x\to 3^-} 5^{\frac{1}{x-3}}$ e verifica la sua esattezza utilizzando la corrispondente definizione di limite. Quale delle seguenti proposizioni esprime correttamente la definizione corrispondente?

A $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow 5^{\frac{1}{x-3}} < \varepsilon$

B $\forall M > 0 \; \exists \delta > 0 : 0 < 3-x < \delta \Rightarrow 5^{\frac{1}{x-3}} < -M$

C $\forall M > 0 \; \exists \delta > 0 : 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow 5^{\frac{1}{x-3}} < -M$

D $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : 0 < 3-x < \delta \Rightarrow 5^{\frac{1}{x-3}} < \varepsilon$