PROVA DI VERIFICA **28A**

Limiti di successioni

Fila A	Cognome	Nome ....
Tempo: 2 ore	Classe	Data ....

Problema

Considera la successione così definita ricorsivamente: $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 2 \\ a_{n+1} = a_n - \dfrac{2}{9} a_{n-1} \end{cases}$.

a. Dimostra per induzione che è una progressione geometrica. Determina il termine generale.

b. Calcola $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

c. Esprimi in funzione di n il termine generale della successione s_n definita da $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ e calcola s_5 e $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.

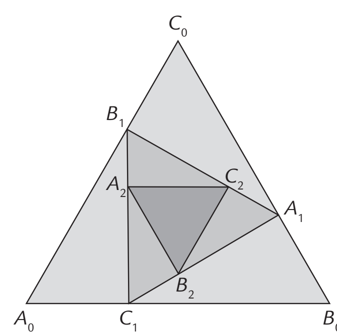
d. Stabilisci se la successione $b_n = \log_{\frac{2}{3}} a_n$ è una progressione aritmetica o geometrica, individuane il primo termine e la ragione, poi calcola $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n^2}{\sigma_n}$, essendo $\sigma_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

e. Dopo avere determinato il termine generale c_n della successione definita da $c_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} - \dfrac{a_{n-1}}{a_n} n$, stabilisci se è una progressione aritmetica o geometrica, individuane il primo termine e la ragione, poi calcola $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$.

Quesiti

1 Sia $A_0B_0C_0$ un triangolo equilatero.
Costruiamo il triangolo $A_1B_1C_1$ i cui vertici sono tali che $A_0C_1 \cong B_0A_1 \cong C_0B_1 \cong \dfrac{1}{3} A_0B_0$.

a. Dimostra che il triangolo $A_1B_1C_1$ è anch'esso equilatero e che $B_1C_1 \perp A_0B_0$.
b. Ripetendo sul triangolo $A_1B_1C_1$ la stessa costruzione effettuata su $A_0B_0C_0$, si ottiene un nuovo triangolo $A_2B_2C_2$. Su questo può essere nuovamente ripetuta la costruzione ottenendo un nuovo triangolo $A_3B_3C_3$ e così via.
Sia $a_0, a_1, \ldots, a_n$ la successione delle aree dei triangoli $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$, ..., $A_nB_nC_n$. Dimostra che è una progressione geometrica e determina il suo termine generale supponendo che il lato A_0B_0 misuri 6.



2 Calcola il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{n! + (n-1)!}{(n+1)!} \sin 2n\right]$.

3 Dimostra che la successione, così definita ricorsivamente: $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{1 + 2a_n} \end{cases}$, è convergente e calcola il suo limite per $n \to +\infty$.

4 Studia la successione $a_n = \left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right)^n$ e calcolane il limite per $n \to +\infty$ nei casi in cui non è irregolare.

5 Dimostra per induzione che $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{3^k} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{3}{3^3} + \ldots + \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$ e deduci la somma della serie $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{k}{3^k}$.

 LIBERAMENTE FOTOCOPIABILE
Petrini - *La matematica a colori* © De Agostini Scuola SpA, 2015

PROVA DI VERIFICA **28B**

Limiti di successioni

Fila B	Cognome	Nome ....
Tempo: 2 ore	Classe	Data ....

Problema

Considera la successione così definita ricorsivamente $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_{n-1} - a_n - 6 \end{cases}$.

a. Dimostra per induzione che è una progressione aritmetica. Determina il termine generale.

b. Calcola $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n^2}{s_n}$, essendo $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

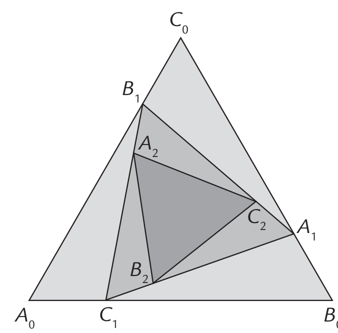
c. Stabilisci se la successione $b_n = 2^{a_n}$ è una progressione aritmetica o geometrica, individuane il primo termine e la ragione, poi calcola $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.

d. Esprimi in funzione di n il termine generale della successione σ_n definita da $\sigma_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ e calcola σ_5 e $\lim\limits_{n \to +\infty} \sigma_n$.

e. Dopo avere determinato il termine generale c_n della successione definita da $c_n = \dfrac{b_{n-1}}{b_n} - \dfrac{b_n}{b_{n-1}} n$, stabilisci se è una progressione aritmetica o geometrica, individuane il primo termine e la ragione, poi calcola $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n$.

Quesiti

1 Sia $A_0B_0C_0$ un triangolo equilatero.
Costruiamo il triangolo $A_1B_1C_1$ i cui vertici sono tali che $A_0C_1 \cong B_0A_1 \cong C_0B_1 \cong \dfrac{1}{4} A_0B_0$.



a. Dimostra che il triangolo $A_1B_1C_1$ è anch'esso equilatero e determina la lunghezza del suo lato.
b. Ripetendo sul triangolo $A_1B_1C_1$ la stessa costruzione effettuata su $A_0B_0C_0$ si ottiene un nuovo triangolo $A_2B_2C_2$. Su questo può essere nuovamente ripetuta la costruzione ottenendo un nuovo triangolo $A_3B_3C_3$ e così via.
Sia a_0 a_1, ..., a_n la successione delle aree dei triangoli $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$, ..., $A_nB_nC_n$. Dimostra che è una progressione geometrica e determina il suo termine generale supponendo che il lato A_0B_0 misuri 8.

2 Calcola il limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\dfrac{(n-1)!\,(n-1)}{(n+1)! - 2\,(n-1)!} \cos n \right]$.

3 Dimostra che la successione, così definita ricorsivamente $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \end{cases}$ è convergente e calcola il suo limite per $n \to +\infty$.

4 Studia la successione $a_n = \left(x - \sqrt{x^2 - 4}\right)^n$ e calcolane il limite per $n \to +\infty$ nei casi in cui non è irregolare.

5 Dimostra per induzione che $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2^k} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \dots + \dfrac{n}{2^n} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$ e deduci la somma della serie $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{k}{2^k}$.

Petrini - *La matematica a colori* © De Agostini Scuola SpA, 2015