

Fila A	Cognome	Nome
Tempo: 2 ore	Classe	Data

Problema

Rispetto a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) considera il fascio di curve:

$$y = \frac{2x - 3a + 4}{ax - 2} \text{ con } a \in \mathbf{R}$$

- Dimostra che le curve del fascio passano tutte per due punti di cui si chiedono le coordinate.
- Per quali valori di a si ottengono le rette del fascio?
- Qual è l'equazione della curva che si ottiene per $a \rightarrow +\infty$?
- Determina le coordinate del centro di simmetria di ogni curva e verifica analiticamente che ogni curva è simmetrica rispetto a tale punto. Determina le equazioni degli assi di simmetria delle curve del fascio.
- Se P è il punto di intersezione delle curve del fascio con l'asse x , determina il luogo L dei punti della parabola di equazione $y = \frac{x^2}{a}$ la cui ascissa sia uguale a quella di P e disegna un grafico probabile di L , specificando di quale conica si tratta.

Quesiti

1 Determina k in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{kx} - 1}{x} & x < 0 \\ \frac{x^2 + 2k - 2}{1 + x} & x \geq 0 \end{cases}$$

sia continua in \mathbf{R} .

La funzione ottenuta in corrispondenza di questo valore di k ammette asintoti?

2 Dimostra che l'equazione $\sqrt{3-x} = \frac{1}{x}$ ha una soluzione nell'intervallo $[2, 3]$ e determina la soluzione con due cifre decimali esatte mediante il metodo di bisezione.

3 Determina il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{2-2^{\frac{x}{2-x}}}$$

e studia i suoi eventuali punti di discontinuità.

4 Dopo avere tracciato il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{|x+1|} & x \leq 0 \\ \frac{1}{1-x} & 0 < x < 1 \\ (x-2)^2 & 1 \leq x \leq 3 \\ 3^{3-x} & x > 3 \end{cases}$$

stabilisci in quale dei seguenti intervalli si può applicare il teorema di Weierstrass. In caso affermativo, determina il minimo e il massimo in ciascuno di essi:

$$[-4, -2] \quad [-2, 1] \quad [1, 2] \quad [2, 4] \quad [3, +\infty)$$

5 Traccia il grafico probabile della funzione:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$$

Fila B	Cognome	Nome
Tempo: 2 ore	Classe	Data

Problema

Rispetto a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) considera il fascio di curve:

$$y = \frac{3x - 2a - 3}{ax - 3} \text{ con } a \in \mathbf{R}$$

- a. Dimostra che le curve del fascio passano tutte per due punti di cui si chiedono le coordinate.
- b. Per quali valori di a si ottengono le rette del fascio?
- c. Qual è l'equazione della curva che si ottiene per $a \rightarrow +\infty$?
- d. Determina le coordinate del centro di simmetria e degli assi di simmetria delle curve del fascio.
- e. Se P è il punto di intersezione delle curve del fascio con l'asse x , determina il luogo L dei punti della parabola di equazione $y = \frac{x^2}{a}$ la cui ascissa sia uguale a quella di P e disegna un grafico probabile di L , specificando di quale conica si tratta.

Quesiti

1 Determina k in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k - x^2}{x - 2} & x \leq 0 \\ \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} & x > 0 \end{cases}$$

sia continua in \mathbf{R} .

La funzione ottenuta in corrispondenza di questo valore di k ammette asintoti?

2 Dimostra che l'equazione $\sqrt{x^2 + 1} = 2^{1-x}$ ha una soluzione nell'intervallo $[0, 1]$ e determina la soluzione con due cifre decimali esatte mediante il metodo di bisezione.

3 Determina il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{x}{3^{\frac{x^2+1}{x+1}} - 3}$$

e studia i suoi eventuali punti di discontinuità.

4 Dopo avere tracciato il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x \leq -3 \\ \ln(x+3) & -3 < x < -2 \\ x^2 + 2x & -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{x-2}{|x-2|} & x > -1 \end{cases}$$

stabilisci in quale dei seguenti intervalli si può applicare il teorema di Weierstrass. In caso affermativo, determina il minimo e il massimo in ciascuno di essi:

$$[-3, -2] \quad [-2, 0] \quad [0, 2] \quad [3, 4] \quad [4, +\infty)$$

5 Traccia il grafico probabile della funzione:

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4x}$$