Unità 2 - Definizioni e teoremi sui limiti

1 Traccia il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{|x^2 - 1|}$ e deduci intuitivamente dal grafico i valori dei seguenti limiti:

a. $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ **b.** $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ **c.** $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ **d.** $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

2 Traccia il grafico di una funzione che soddisfi contemporaneamente le seguenti condizioni:

a. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -4$ **b.** $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ **c.** $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$ **d.** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

Verifica i seguenti limiti, in base alla definizione.

3 $\lim_{x \to +\infty} (x^3 + 1) = +\infty$

4 $\lim_{x \to -\infty} (1 - e^x) = 1$

5 $\lim_{x \to 2} (x^2 - 4x) = -4$

6 $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{1}{\sqrt{x - 3}} = +\infty$

7 Sia f una funzione definita in un intorno I di $x_0 \in \mathbf{R}$, eccetto che in x_0; stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, giustificale, altrimenti esibisci un controesempio.

a. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ certamente esiste ed è unico. V F

b. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$ implica $|f(x) - 1| < 10^{-3}$. V F

c. Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$, allora è unico. V F

d. Se f è strettamente crescente in I, allora certamente esistono $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$. V F

8 Stabilisci se ha senso calcolare il seguente limite: $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^3 - x^2}$, giustificando la risposta. In caso affermativo, calcolalo.

9 Fornisci l'esempio di una funzione che soddisfi, contemporaneamente, le seguenti condizioni, precisandone l'espressione analitica.

a. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b. $f(0) = 0$

c. $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ non esiste

10 Sia f una funzione definita in un intorno dell'origine, tale che $|f(x)| \leq x^2$ per ogni x appartenente a tale intorno. In base a queste informazioni è possibile stabilire quanto vale $\lim_{x \to 0} f(x)$?

Le soluzioni sono alla pagina seguente

Soluzioni

1 Il grafico è quello in fig. 1. Da esso si deduce che: **a.** $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -1$; **b.** $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$; **c.** $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1$; **d.** $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$.

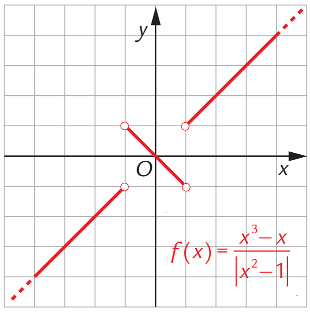

Figura 1

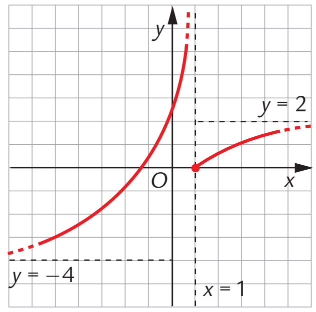

Figura 2

2 Una funzione che soddisfa le condizioni richieste è per esempio quella il cui grafico è in fig. 2.

3 Sia $M > 0$; la disequazione $x^3 + 1 > M$ è soddisfatta per $x > \sqrt[3]{M-1}$, che è un intorno di $+\infty$, quindi il limite resta verificato. Precisamente, la definizione di limite data nel Paragrafo 2 (nel caso che x_0 ed l siano infiniti) è soddisfatta prendendo $N = \sqrt[3]{M-1}$.

4 Sia $\varepsilon > 0$; la disequazione $\underbrace{|1 - e^x - 1|}_{|f(x)-1|} < \varepsilon$, ossia $e^x < \varepsilon$, è soddisfatta per $x < \ln \varepsilon$, che è un intorno di $-\infty$, quindi il limite resta verificato. Precisamente, la definizione di limite data nel Paragrafo 2 (nel caso che x_0 sia infinito ed l sia finito) è soddisfatta prendendo $N = \ln \varepsilon$.

5 Sia $\varepsilon > 0$; la disequazione $\underbrace{|x^2 - 4x + 4|}_{|f(x)-(-4)|} < \varepsilon$ è soddisfatta per $2 - \sqrt{\varepsilon} < x < 2 + \sqrt{\varepsilon}$, che costituisce evidentemente un intorno di 2, quindi il limite resta verificato. Precisamente, la definizione di limite data nel Paragrafo 2 (nel caso che x_0 ed l siano finiti) è soddisfatta prendendo $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

6 Sia $M > 0$; la disequazione $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}} > M$ è soddisfatta per $3 < x < 3 + \dfrac{1}{M^2}$, che è un intorno destro di 3, quindi il limite è verificato. La definizione di limite destro nel caso in cui x_0 è finito ed l è infinito è dunque soddisfatta prendendo $\delta = \dfrac{1}{M^2}$.

7 **a.** F (per esempio la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ è definita in un intorno di 0 eccetto che in $x = 0$ ma $\lim_{x \to 0} f(x)$ non esiste; **b.** V, segue dalla definizione di limite prendendo $\varepsilon = 10^{-3}$; **c.** V, per il teorema di unicità del limite; **d.** V, per il teorema di esistenza del limite per le funzioni monotone.

8 La funzione f è definita per $x = 0 \vee x \geq 1$. Per $x = 0$ la funzione f è definita e $f(0) = 0$, tuttavia $x = 0$ **non** è un punto di accumulazione del dominio della funzione, dunque non ha senso calcolare il limite per $x \to 0$.

9 Per esempio la funzione f così definita: $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ \sin x & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

10 La condizione data equivale a $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$; poiché $\lim_{x \to 0} (-x^2) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$, per il teorema del confronto possiamo affermare che $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.