

Unità 3 - Progressioni aritmetiche e geometriche e limiti di successioni

1 Fornisci l'esempio:

- a. di una successione limitata e irregolare;
- b. di una progressione geometrica limitata;
- c. di una progressione aritmetica strettamente decrescente;
- d. di una successione monotona non convergente.

2 Calcola: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{\pi n}{\sqrt{9n^2 + 1}} \right)$.

3 Stabilisci se ciascuna delle seguenti successioni è convergente, divergente o irregolare:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 1}}; \quad b_n = \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

4 Considera la successione così definita per ricorrenza: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 5 \end{cases}$, con $n \geq 1$. Stabilisci se si tratta di una progressione aritmetica o geometrica, esprimi il termine generale a_n in funzione di n e determina se la successione a_n è convergente, divergente o irregolare. Quanto vale $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$?

5 Calcola: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)! - (n+1)!}{(n+2)!}$

6 Sia s_n la somma dei primi n multipli di 3 diversi da zero; calcola $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{n^2}$.

7 Stabilisci se le seguenti affermazioni relative a una successione a_n sono vere o false. Se sono vere giustificale, altrimenti esibisci un controesempio.

- a. se a_n è convergente, allora anche $a_{n+1} - a_n$ è convergente ☐ V ☐ F
- b. se $a_{n+1} - a_n$ è convergente, allora a_n è convergente ☐ V ☐ F
- c. se a_n è convergente a un numero non nullo, allora anche $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ è convergente ☐ V ☐ F
- d. se $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ è convergente, allora anche a_n è convergente ☐ V ☐ F

8 Considera la progressione aritmetica a_n tale che $a_1 = 3$ e $a_4 = 15$. Determina il termine generale a_n e calcola $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$.

9 Considera la progressione geometrica a_n il cui primo termine è $a_1 = 9$ e la cui ragione è $\frac{1}{3}$. Determina il termine generale di a_n e il termine generale di $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Quindi calcola:

- a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$
- b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$

10 Considera la successione così definita per ricorrenza: $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = (k-1)a_{n-1} \end{cases}$, con $n \geq 1$ e $k \in \mathbf{R}$. Per quali valori di k è convergente?

Soluzioni

1 Alcuni possibili esempi sono: **a.** $(-1)^n$; **b.** $\left(\frac{1}{2}\right)^n$; **c.** $1 - n$; **d.** $2n + 3$.

2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi n}{\sqrt{9n^2 + 1}}\right) = \cos \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi n}{\sqrt{9n^2 + 1}} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$

3 Osservando che $0 < |a_n| < \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dal teorema del confronto segue che $|a_n| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, quindi anche $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$; la successione a_n è perciò *convergente*. La successione b_n invece è *irregolare*: infatti la restrizione ai termini b_{2k} di indice pari fornisce la successione $b_{2k} = \frac{2k}{\sqrt{4k^2 + 1}}$ che converge a 1, mentre la restrizione ai termini b_{2k+1} di indice dispari fornisce la successione $b_{2k+1} = -\frac{2k+1}{\sqrt{4k^2 + 4k + 2}}$ che converge a -1.

4 $a_n = 5n - 3$, ovviamente divergente; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n}{2}(a_1 + a_n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n - 1}{2} = +\infty$

5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)! - (n+1)!}{(n+2)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)(n+1)! - (n+1)!}{(n+2)(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)(n+1)!}{(n+2)(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1.$

6 La successione dei multipli di 3, $a_n = 3n$, è una progressione aritmetica di ragione 3; pertanto la somma dei primi n multipli di 3 diversi da zero è $s_n = a_1 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}(3n^2 + 3n)$; ne segue che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{n^2} = \frac{3}{2}.$

7 **a.** V (infatti se $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, anche $a_{n+1} \rightarrow l \in \mathbb{R}$, quindi $(a_{n+1} - a_n) \rightarrow 0$); **b.** F (un controesempio è dato da $a_n = \ln n$); **c.** V (infatti se $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} - \{0\}$, anche $a_{n+1} \rightarrow l \in \mathbb{R} - \{0\}$, quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$); **d.** F (un controesempio è dato da $a_n = n$).

8 $a_n = 4n - 1$, quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 4.$

9 $a_n = 9\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; $s_n = \frac{27}{2}(1 - 3^{-n})$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{27}{2}.$

10 Osserva che $a_n = 4(k-1)^{n-1}$, vale a dire a_n è una progressione geometrica di ragione $k-1$. Pertanto converge se e solo se $-1 < k-1 \leq 1$, cioè per $0 < k \leq 2$.