Unità 4 - Funzioni continue e punti di discontinuità

1 Studia gli eventuali punti di discontinuità della funzione $f(x) = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}} - 4}$.

2 Determina l'insieme dei valori di x per cui la funzione $f(x) = \sqrt{\log_2\left(\dfrac{x}{1-x}\right)}$ è continua.

3 Traccia il grafico della funzione $y = \dfrac{|x^2-1|(x-1)}{x^2-1}$ e classifica i suoi eventuali punti di discontinuità.

4 Una sola delle seguenti funzioni è prolungabile con continuità in $x = 0$. Individua quale, giustificando adeguatamente la risposta, e definisci il prolungamento continuo della funzione in $x = 0$.

a. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$ **b.** $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$ **c.** $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ **d.** $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^3}$

5 Traccia il grafico della funzione f e classifica i suoi eventuali punti di discontinuità:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x \geq 0 \\ \cos x & -\dfrac{3\pi}{2} \leq x < 0 \\ \tan x & -2\pi \leq x < -\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

6 Determina per quali valori reali di a la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 - a^2 + 1 & x < a \\ |x-3| & x \geq a \end{cases}$ è continua in $\mathbf{R}$.

7 Traccia il grafico e determina l'espressione analitica di una funzione che possieda le seguenti caratteristiche:

a. è definita in $\mathbf{R}$ e continua in $\mathbf{R}$ eccetto che nei punti $x = -1$ e $x = 0$;
b. per $x = -1$ presenta un punto di discontinuità eliminabile;
c. per $x = 0$ presenta un punto di salto.

8 Studia, al variare del parametro reale k, gli eventuali punti di discontinuità della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x^k} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

9 Stabilisci se le seguenti affermazioni relative a due funzioni f e g sono vere o false; se sono vere, giustificale, altrimenti fornisci un controesempio.

a. se f è continua in x_0, allora $|f|$ è continua in x_0 V F
b. se f **non** è continua in x_0, allora $|f|$ **non** è continua in x_0 V F
c. se f è continua in x_0 e g è continua in x_0 anche la funzione $f + g$ è continua in x_0 V F
d. se $f + g$ è continua in x_0, allora f è continua in x_0 e g è continua in x_0 V F

10 Dimostra che la funzione $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbf{Q} \\ x^2 & x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$ è continua se e solo se $x = 0$ o $x = 1$.

Le soluzioni sono alla pagina seguente

Soluzioni

1 La funzione è definita e continua in $\mathbf{R} - \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$. Il punto $x = 0$ è di salto; il punto $x = \frac{1}{2}$ è invece di discontinuità di seconda specie.

2 La funzione è continua nel suo dominio, cioè nell'intervallo $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

3 Vedi il grafico in fig. 1. La funzione presenta per $x = -1$ un punto di salto e per $x = 1$ un punto di discontinuità eliminabile.

4 L'unica funzione che è prolungabile con continuità in $x = 0$ è la **c**: infatti è l'unica che per $x = 0$ presenta un punto di discontinuità eliminabile (la **a** e la **d** presentano in $x = 0$ un punto di discontinuità di seconda specie, la **b** un punto di salto). Il prolungamento continuo della **c** è: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$

5 Vedi la fig. 2. La funzione presenta un punto di salto per $x = 0$ e un punto di discontinuità di seconda specie per $x = -\frac{3\pi}{2}$.

6 Imponendo che i limiti per $x \to a^-$ e per $x \to a^+$ siano uguali, si giunge all'equazione $|a - 3| = 1$, da cui si ricava $a = 2 \vee a = 4$.

7 Per esempio la funzione così definita $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ 1 & x = -1 \\ -1 & -1 < x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$. Vedi il grafico in fig. 3.

8 Se $k > 1$, la funzione presenta in $x = 0$ un punto di discontinuità di seconda specie; se $k = 1$, la funzione è continua in $\mathbf{R}$; se $k < 1$, la funzione presenta in $x = 0$ un punto di discontinuità eliminabile.

9 **a.** V (infatti se f è continua in base ai teoremi sui limiti, $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$); **b.** F (per esempio la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ non è continua in zero, mentre la funzione $|f(x)|$ (che coincide con la funzione, costante uguale a 1) è continua anche in $x = 0$); **c.** V (in base al teorema sul limite di una somma); **d.** F (per esempio se consideriamo le funzioni $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -1 & x \geq 0 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$, la loro somma è la funzione costante uguale a 0, quindi è continua in $x = 0$, tuttavia né la funzione f né la funzione g sono continue in $x = 0$).

10 Sia $x_0 \in \mathbf{R}$. Quando $x \to x_0$ per valori *razionali* la funzione tende a x_0, mentre quando $x \to x_0$ per valori *irrazionali*, la funzione tende a x_0^2. Affinché esista il limite della funzione per $x \to x_0$ deve allora essere $x_0 = x_0^2$, da cui $x_0 = 0 \vee x_0 = 1$. Viceversa è facile dimostrare, in base alla definizione di limite, che $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$; quindi, essendo questi ultimi due limiti rispettivamente uguali a $f(0)$ e $f(1)$, la funzione è continua in $x = 0$ e in $x = 1$.

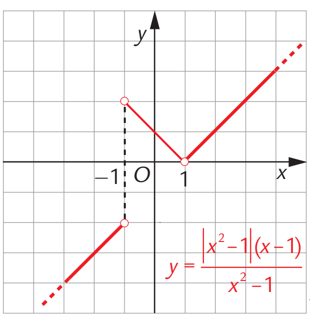

Figura 1

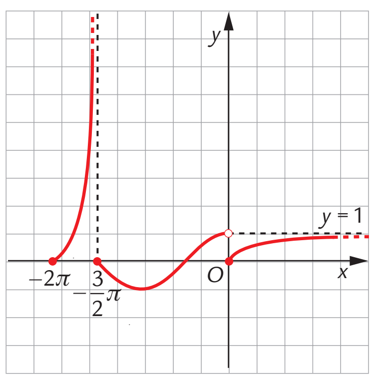

Figura 2

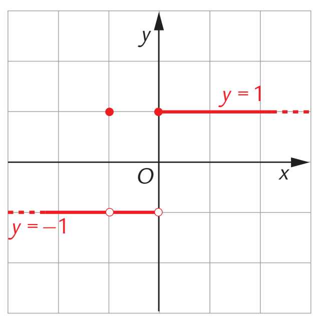

Figura 3