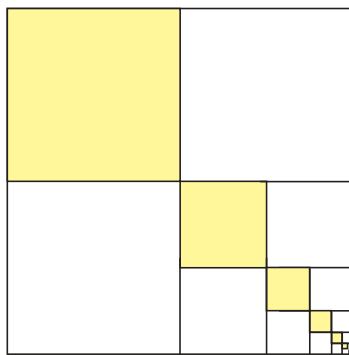


Unità 3 - Principio di induzione e introduzione alle serie

- 1** Dimostra per induzione che, per ogni $n \geq 1$, $3 + 6 + 9 + \dots + 3n = \frac{3}{2}n(n+1)$
- 2** Dimostra per induzione che, per ogni $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ è divisibile per 3.
- 3** Considera la successione: $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 3) \end{cases}$, con $n \geq 0$. Dimostra che è convergente, quindi calcola il suo limite.
- 4** Considera la successione: $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \end{cases}$, con $n \geq 0$. Calcola i primi sei termini della successione e formula una congettura sull'espressione del termine generale a_n in funzione di n . Prova quindi a dimostrare la tua congettura per induzione.
- 5** Osserva la figura qui sotto. Il quadrato più grande è stato suddiviso in quattro quadrati congruenti, di cui è stato colorato quello in alto a sinistra. Quindi si è ripetuto lo stesso procedimento al quadrato in basso a destra, e così via. Continuando indefinitamente questo procedimento, quale frazione del quadrato più grande resta colorata?



- 6** Calcola la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{2n}}$.
- 7** Stabilisci se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ è convergente.
- 8** Determina per quali valori di x la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^n$ è convergente.
- 9** Calcola la somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 6}$.
- 10** Rappresenta il numero $0,5\overline{12}$ utilizzando una opportuna serie geometrica e, calcolando la somma della serie, deduci la frazione generatrice.

Soluzioni

1 Per $n = 1$ l'uguaglianza è ovviamente vera (si ottiene $3 = 3$). Sia $k \geq 1$ e supponiamo che l'uguaglianza sia vera per $n = k$, cioè che $3 + 6 + 9 + \dots + 3k = \frac{3}{2}k(k+1)$. Allora:

$$3 + 6 + 9 + \dots + 3k + 3(k+1) = \underbrace{\frac{3}{2}k(k+1)}_{\text{ipotesi induttiva}} + 3(k+1) = \underbrace{\frac{3}{2}(k+1)(k+2)}_{\substack{\text{abbiamo ottenuto il secondo membro} \\ \text{dell'uguaglianza da dimostrare,} \\ \text{con } k+1 \text{ al posto di } n}}$$

quindi l'uguaglianza è vera anche per $n = k + 1$. In base al principio d'induzione possiamo concludere che l'uguaglianza è vera per ogni $n \geq 1$.

2 Per $n = 1$ la tesi è vera perché $n^3 + 2n = 3$ è ovviamente divisibile per 3. Supponiamo $k \geq 1$ e che la proprietà sia soddisfatta per $n = k$, cioè che $k^3 + 2k$ sia divisibile per 3, allora anche:

$$(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 5k + 3 = \underbrace{k^3 + 2k}_{\substack{\text{divisibile per 3} \\ \text{per ipotesi induttiva}}} + 3(k^2 + k + 1)$$

è divisibile per 3, ovvero la proprietà è soddisfatta anche per $n = k + 1$. In base al principio d'induzione possiamo concludere che $n^3 + 2n$ è divisibile per 3 per ogni $n \geq 1$.

3 Calcolando i primi termini della successione si può *congetturare* che è strettamente crescente e convergente a 3. Per *induzione* si può *dimostrare* rigorosamente che è strettamente crescente e che $a_n < 3$ per ogni $n \geq 0$. Ne segue che la successione, essendo strettamente crescente e superiormente limitata, è convergente. Il limite l deve soddisfare la relazione $l = \frac{1}{2}(l+3)$, da cui $l = 3$.

4 Poiché $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 15, a_5 = 31, \dots$ si congetture che $a_n = 2^n - 1$; ciò si può facilmente dimostrare per induzione.

5 Sia a la misura del lato del quadrato originario. La somma delle aree degli infiniti quadrati colorati è $a^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{a^2}{3}$, quindi la parte colorata è $\frac{1}{3}$ del quadrato originario.

6 $\frac{4}{7}$

7 La successione delle somme parziali ha come termine generale $s_n = \sqrt{n+1} - 1$; poiché $s_n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$, la serie diverge.

8 $0 < x < 2$

9 Osservando che $\frac{1}{n^2 + 5n + 6} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$, si riconosce una serie telescopica, avente come successione delle somme parziali $s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}$; ne segue che la somma della serie è $\frac{1}{2}$.

10 $0,5\overline{12} = 0,5 + \frac{12}{10^3} + \frac{12}{10^5} + \frac{12}{10^7} + \dots = 0,5 + \frac{12}{10^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{2n}} = 0,5 + \frac{12}{1000} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n = 0,5 + \frac{12}{1000} \frac{100}{99} = \frac{169}{330}$