Unità 4 - Proprietà delle funzioni continue e grafici probabili

1 Determina gli asintoti della funzione:

$y = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$

2 Determina a, b e $c \in \mathbf{R}$ in modo che la funzione $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx}{x + c}$ abbia come asintoto obliquo la retta di equazione $y = 2x - 1$ e la retta di equazione $x = 2$ sia un suo asintoto verticale.

3 Traccia il grafico probabile della funzione:

$y = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$

4 Dimostra che l'equazione $2^x = x^2$ ammette tre soluzioni e determina un'approssimazione della soluzione minore, esatta fino alla seconda cifra decimale, mediante il metodo di bisezione.

5 Traccia il grafico probabile della funzione:

$y = e^{\frac{1}{x^2 - 1}} - 1$

6 Stabilisci se le seguenti affermazioni sono *vere* o *false*. Se sono vere giustificale, altrimenti fornisci un controesempio.

a. se per $x \to +\infty$ una funzione ammette asintoto orizzontale, allora non può ammettere asintoto obliquo ☐V ☐F

b. se per $x \to +\infty$ una funzione non ammette asintoto orizzontale, allora ammette certamente asintoto obliquo ☐V ☐F

c. se una funzione ammette asintoto obliquo destro, allora ammette anche asintoto obliquo sinistro ☐V ☐F

d. se una funzione è periodica, non costante, non ammette asintoti orizzontali ☐V ☐F

7 Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & -\pi \leq x < 0 \\ 1 + 2\sin x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

tracciane il grafico. Verifica che essa ammette massimo e minimo assoluti nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ e precisane i valori. L'esistenza del minimo e del massimo assoluti in $[-\pi, \pi]$ poteva essere garantita a priori in base al teorema di Weierstrass?

8 Determina l'espressione analitica e il grafico di una funzione che possieda le seguenti proprietà:

a. è definita in $[-3,3]$;

b. ammette minimo uguale a -2 e massimo uguale a 3;

c. non è continua in $[-3,3]$, ma soddisfa ugualmente la tesi del teorema dei valori intermedi.

9 Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{ax^2 + x + 1}$, determina per quali valori del parametro reale a:

a. ammette asintoto orizzontale, precisando l'equazione dell'asintoto;

b. ammette asintoto obliquo, precisando l'equazione dell'asintoto;

c. non ammette asintoti verticali.

10 Sia f una funzione continua nell'intervallo $[0,1]$ e tale che $0 \leq f(x) \leq 1$ per ogni $x \in [0,1]$. Dimostra che esiste $c \in [0,1]$ tale che $f(c) = c$.

Le soluzioni sono alla pagina seguente

Soluzioni

1 Asintoto orizzontale destro: $y = \frac{1}{2}$; asintoto obliquo sinistro: $y = -2x - \frac{1}{2}$.

2 $a = 2,\ b = -5,\ c = -2$

3 Vedi il grafico in fig. 1.

4 Tracciando accuratamente i grafici delle due funzioni $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$ si vede che essa ammette tre soluzioni: quella minore è compresa tra -1 e 0, mentre è facile riconoscere che le altre due soluzioni sono $x = 2$ e $x = 4$. Applicando il metodo di bisezione si trova $x \simeq -0{,}76$ (approssimazione esatta fino alla seconda cifra decimale).

5 Vedi il grafico in fig. 2.

6 **a.** V; **b.** F (controesempio: $y = x^2 + \frac{1}{x}$); **c.** F (controesempio: $y = \sqrt{1+x^2} + x$); **d.** V.

7 Vedi il grafico in fig. 3, da cui puoi dedurre che il minimo della funzione è -1 e il massimo è 3.

La funzione, certamente continua negli intervalli $-\pi \leq x < 0$ e $0 < x \leq \pi$, è continua anche in $x = 0$ poiché $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$. Ne segue che la funzione è continua in $[-\pi, \pi]$, quindi l'esistenza del massimo e del minimo assoluto era garantita a priori dal teorema di Weierstrass.

8 Per esempio la funzione $f(x) = \begin{cases} x+1 & -3 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$, che ha il grafico in fig. 4.

9 **a.** l'asintoto orizzontale esiste per $a \neq 0$ e ha equazione $y = \frac{1}{a}$; **b.** l'asintoto obliquo esiste per $a = 0$ e ha equazione $y = x - 1$; **c.** la funzione non ammette asintoti verticali se e solo se $a > \frac{1}{4}$.

10 Se $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$, il teorema è dimostrato. Altrimenti, considerata la funzione $g(x) = f(x) - x$, osserviamo:

- $g(0) = f(0) > 0$ (infatti stiamo supponendo $f(0) \neq 0$ e per ipotesi $0 \leq f(0) \leq 1$);
- $g(1) = f(1) - 1 < 0$ (infatti stiamo supponendo $f(1) \neq 1$ e per ipotesi $0 \leq f(1) \leq 1$).

Poiché f è continua in $[0, 1]$, anche g lo è, quindi g soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri nell'intervallo $[0, 1]$ e perciò esiste $c \in (0, 1)$ tale che $g(c) = 0$, ovvero tale che $f(c) = c$. Ciò completa la dimostrazione.

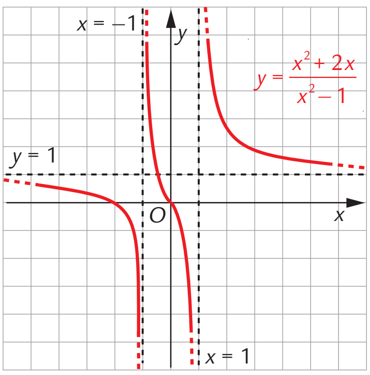

Figura 1

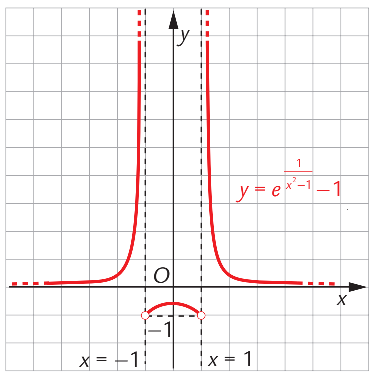

Figura 2

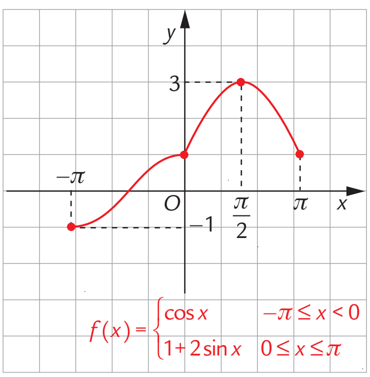

Figura 3

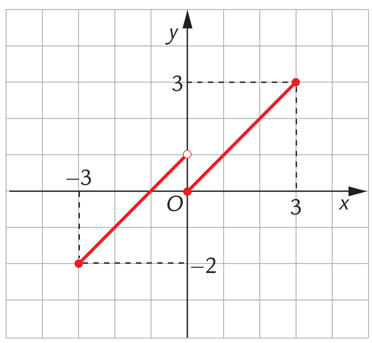

Figura 4