Completamento della dimostrazione del teorema 2.7

Presentiamo la dimostrazione del punto **e** del **teorema 2.7** (che ripetiamo per comodità qui sotto).

Algebra dei limiti, nel caso di limiti finiti — **TEOREMA 2.7**

Supponiamo che le due funzioni f e g siano entrambe definite in un intorno di x_0, eccetto al più x_0, e che sia:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$$

dove $l_1 \in \mathbf{R}$, $l_2 \in \mathbf{R}$ e $x_0 \in \mathbf{R}^*$. Allora risulta:

a. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$

b. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = l_1 - l_2$

c. $\lim\limits_{x \to x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot l_1 \qquad$ per ogni $k \in \mathbf{R}$

d. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$

e. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2} \qquad$ se $l_2 \neq 0$

DIMOSTRAZIONE DEL PUNTO e

- Osserviamo che è sufficiente mostrare che $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{l_2}$. Dimostrato ciò, la tesi segue osservando che $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}$ e applicando il punto **d**.
- Per ogni $\varepsilon > 0$, poiché $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$, esiste un intorno I_1 di x_0 tale che:

  $|g(x) - l_2| < \varepsilon \qquad$ per ogni $x \in I_1$, con $x \neq x_0 \qquad$ [1]
- Sempre dal fatto che $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$, fissando $\varepsilon = \dfrac{|l_2|}{2}$ segue che esiste un intorno I_2 di x_0 tale che:

  $|g(x) - l_2| < \dfrac{|l_2|}{2} \qquad$ per ogni $x \in I_2$, con $x \neq x_0$

  In tale intorno, per la disuguaglianza triangolare sarà anche:

  $$|l_2| = |l_2 - g(x) + g(x)| \leq |l_2 - g(x)| + |g(x)| < \frac{|l_2|}{2} + |g(x)|$$

  quindi: $|g(x)| > \dfrac{|l_2|}{2} \qquad$ [2]
- Allora, per ogni $x \in I_1 \cap I_2$ (con $x \neq x_0$) risulta:

  $$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l_2} \right| = \frac{|l_2 - g(x)|}{|l_2 \cdot g(x)|} < \frac{\varepsilon}{|l_2| \dfrac{|l_2|}{2}} = \frac{2\varepsilon}{l_2^2}$$

  Abbiamo utilizzato le proprietà dei valori assoluti, la [1] e la [2]
- Per ogni $\varepsilon > 0$ abbiamo trovato un intorno di x_0, $I_1 \cap I_2$, per ogni x del quale (eccetto al più x_0) i valori assunti dalla funzione $\dfrac{1}{g}$ si discostano da $\dfrac{1}{l_2}$ per una quantità arbitrariamente piccola (infatti $\dfrac{2\varepsilon}{l_2^2}$ è arbitrario tanto quanto ε, se $l_2 \neq 0$, essendo $\dfrac{2}{l_2^2}$ una costante). Pertanto, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{l_2}$.