

Dimostrazione del teorema degli zeri

In questa scheda forniamo la dimostrazione del teorema (di esistenza) degli zeri, di cui ripetiamo per comodità l'enunciato.

Teorema degli zeri

TEOREMA 4.5

Sia f una funzione definita e **continua in un intervallo chiuso e limitato** $[a, b]$.

Se $f(a) f(b) < 0$, allora la funzione ammette **almeno uno zero** in (a, b) , ossia esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

DIMOSTRAZIONE

Per fissare le idee supponiamo:

$$f(a) < 0 \quad \text{e} \quad f(b) > 0$$

(ma la dimostrazione potrebbe svolgersi analogamente se fosse $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$).

L'idea alla base della dimostrazione è di costruire due opportune *successioni convergenti*, applicando sostanzialmente il procedimento di bisezione, e poi far vedere che il loro limite è uno zero della funzione f .

a. Costruiamo due successioni convergenti con il metodo di bisezione

Consideriamo il punto medio $c = \frac{a+b}{2}$ dell'intervallo $[a, b]$.

Se $f(c) = 0$ abbiamo trovato lo zero cercato, quindi il teorema resta dimostrato; altrimenti possiamo costruire un nuovo intervallo, che chiamiamo $[a_1, b_1]$, contenuto in $[a, b]$, tale che:

$$f(a_1) < 0 \quad \text{e} \quad f(b_1) > 0$$

Infatti:

- se $f(c) < 0$, agli estremi dell'intervallo $[c, b]$ risulta $f(c) < 0$ e $f(b) > 0$, dunque possiamo prendere $a_1 = c$ e $b_1 = b$;
- se $f(c) > 0$, agli estremi dell'intervallo $[a, c]$ risulta $f(a) < 0$ e $f(c) > 0$, dunque possiamo prendere $a_1 = a$, $b_1 = c$.

Possiamo ora applicare il medesimo ragionamento all'intervallo $[a_1, b_1]$, per produrre un intervallo $[a_2, b_2]$ tale che $f(a_2) < 0$ e $f(b_2) > 0$, e così via.

Così procedendo può accadere che uno dei punti medi degli intervalli che si vengono a determinare sia uno zero di f e il teorema resta così dimostrato; oppure ciò può non accadere mai, e allora si ottengono due *successioni* a_n, b_n , che, per costruzione, hanno le seguenti proprietà:

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b \quad [1]$$

$$f(a_n) < 0 \quad \text{e} \quad f(b_n) > 0 \quad [2]$$

- la lunghezza dell'intervallo $[a_n, b_n]$ si dimezza a ogni passo; infatti:

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}, \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2},$$

$$b_3 - a_3 = \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{b-a}{2^3}, \text{ e così via}$$

dunque:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad [3]$$

b. Dimostriamo che le due successioni convergono allo stesso limite

La successione a_n è *crescente* e *limitata superiormente* ($a_n \leq b$) per la [1], quindi converge in base al teorema di esistenza del limite delle successioni monotone: diciamo x_0 il suo limite.

Analogamente, la successione b_n è *decrescente* e *limitata inferiormente* ($b_n \geq a$) per la [1], quindi anch'essa converge; inoltre il suo limite deve essere uguale a quello di a_n poiché dalla [3] segue che $b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n}$, quindi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \frac{b-a}{2^n} = x_0$$

c. Dimostriamo che il limite comune di a_n e b_n è uno zero della funzione f

Poiché f è continua, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n) = f(x_0) \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n) = f(x_0)$$

Poiché $f(a_n) < 0$ (per la [2]), per il teorema di permanenza del segno per le successioni segue che $f(x_0) \leq 0$; d'altra parte, essendo $f(b_n) > 0$ (per la [2]), dovrà essere anche $f(x_0) \geq 0$: quindi necessariamente $f(x_0) = 0$. Tenendo conto che $x_0 \in (a, b)$ (vedi nota qui a fianco), il teorema resta dimostrato.

Osserva

Poiché a_n e b_n sono successioni limitate inferiormente da a e superiormente da b , è ovvio che il loro limite comune x_0 deve appartenere ad $[a, b]$. D'altra parte, abbiamo dimostrato che x_0 è uno zero di f e sappiamo per ipotesi che $f(a) f(b) < 0$, quindi x_0 non può coincidere né con a né con b , dunque $x_0 \in (a, b)$.

Concludiamo con alcune osservazioni.

- Nella dimostrazione ha giocato un ruolo importante il teorema sull'esistenza del limite per le successioni monotone, che dipende a sua volta dalla proprietà di *completezza* di $\mathbf{R}$. Il teorema degli zeri è quindi un teorema che dipende in modo essenziale dalle proprietà dell'insieme dei numeri *reali*. Per esempio, la funzione $f(x) = x^2 - 2$, se definita in $\mathbf{Q}$ anziché in $\mathbf{R}$, assume valori discordi agli estremi dell'intervallo $[1, 2]$ ma **non** ha uno zero *razionale* appartenente a questo intervallo.
- Applicando n volte l'algoritmo di bisezione, come è emerso dalla dimostrazione del teorema, si costruiscono intervalli del tipo $[a_n, b_n]$ con:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

ciascuno contenente lo zero x_0 della funzione. Ne segue che gli estremi dell'intervallo $[a_n, b_n]$ costituiscono delle approssimazioni di x_0 affette da un errore non superiore a $\frac{b-a}{2^n}$. Tenendo conto di questa osservazione, possiamo stabilire a priori quante volte occorre ripetere l'algoritmo di bisezione per ottenere una soluzione con una prefissata precisione. Per esempio, se l'intervallo iniziale è $[0, 1]$ e vogliamo ottenere lo zero con un errore minore di un centesimo basterà scegliere n tale che:

$$\frac{1-0}{2^n} < 10^{-2} \Rightarrow 2^{-n} < 10^{-2} \Rightarrow n > 2_2 10 \simeq 6,64$$

Dunque dopo 7 passi possiamo essere certi che otterremo una soluzione con un errore a meno di un centesimo.