Attività guidate

Attività 1 GeoGebra

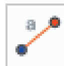
Problemi di massimo e minimo

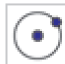
Dato un triangolo ABC, tale che $\overline{AB} = 4$ e $\overline{AC} = 3$, quale deve essere la lunghezza di BC affinché l'area del triangolo ABC sia massima?

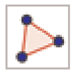
Risorse digitali

Se hai difficoltà a svolgere le attività guidate, fai riferimento ai file di GeoGebra e di Excel disponibili.

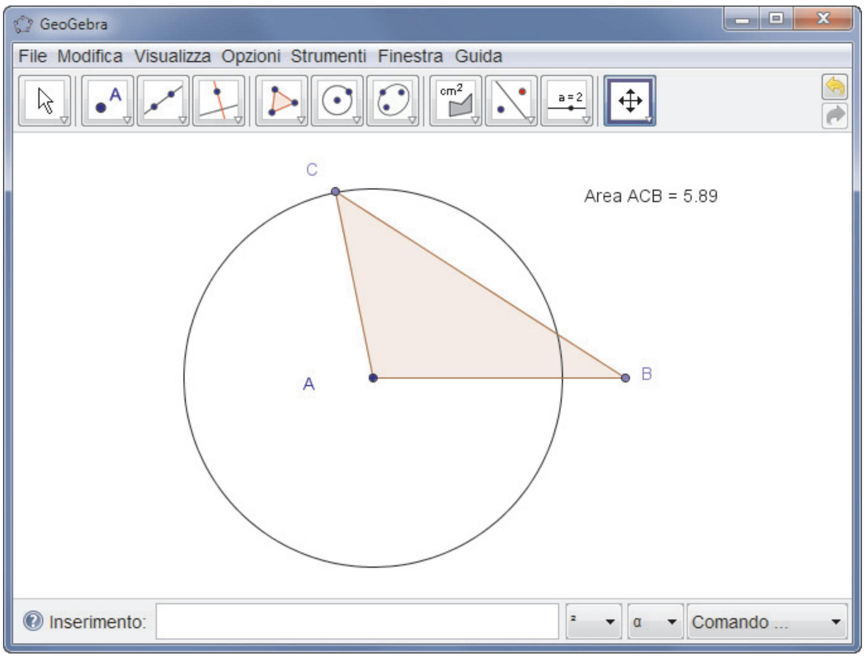
A. APPROCCIO GRAFICO (CON GEOGEBRA)







1. Costruisci un segmento AB di misura 4 con lo strumento **Segmento di data lunghezza da un punto**.
2. Osserva che il punto C deve appartenere alla circonferenza di centro A e di raggio 3; costruisci tale circonferenza con lo strumento **Circonferenza dati centro e raggio** e scegli su di essa un punto C.
3. Costruisci con lo strumento **Poligono** il triangolo ABC e misurane l'area con lo strumento **Area**.
4. Muovi l'oggetto dipendente C e studia come varia, al variare della posizione di C, l'area del triangolo ABC.
5. Formula una congettura sulla posizione di C in corrispondenza della quale l'area del triangolo ABC è massima. Come risulta in tal caso il triangolo?



B. APPROCCIO TRIGONOMETRICO

1. Indica con α l'ampiezza dell'angolo $B\hat{A}C$.
2. In base alla nota formula di trigonometria sull'area del triangolo, esprimi in funzione di α l'area del triangolo ABC.
3. Ricordando come varia il seno di un angolo, deduci l'ampiezza dell'angolo α per cui è massima l'area del triangolo.
4. Deduci la lunghezza del lato BC in corrispondenza del valore di α cui corrisponde il massimo dell'area.

Ricorda

Dato un triangolo i cui lati misurano a, b, c, in base alle disuguaglianze triangolari deve essere:

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases}$$

C. APPROCCIO ALGEBRICO (CON GLI STRUMENTI DELL'ANALISI)

1. Indica con x la misura di BC. Verifica che, in base alle disuguaglianze triangolari, deve essere $1 < x < 7$.

2. Ricordando la formula di Erone, esprimi in funzione di x l'area $A(x)$ del triangolo ABC, verificando che risulta:

$$A(x) = \frac{1}{4}\sqrt{(x^2 - 1)(49 - x^2)}$$

3. Utilizzando gli strumenti dell'analisi, determina il massimo della funzione $A(x)$ nell'intervallo $(1, 7)$.
4. Verifica che il risultato trovato studiando la funzione $A(x)$ è in accordo con quello ricavato ragionando dal punto di vista della trigonometria.

Ricorda

In base alla formula di Erone, l'area A del triangolo i cui lati misurano a, b, c è data da:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

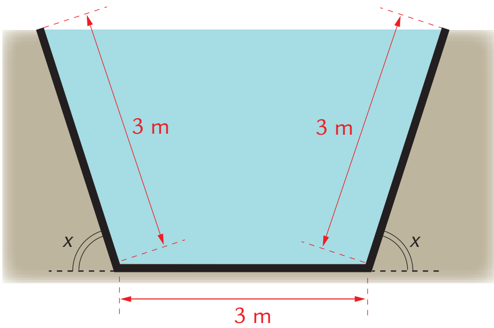
essendo p il semiperimetro del triangolo stesso.

Attività 2 Foglio elettronico, GeoGebra

Sezione di un canale

La sezione di un canale irriguo ha la forma di un trapezio isoscele i cui lati obliqui, di lunghezza 3 m, sono congruenti alla base minore, come illustrato in figura.

Per quale valore dell'angolo x l'area della sezione del canale è massima?



A. APPROCCIO NUMERICO (CON EXCEL)

Costruisci un foglio Excel come quello di cui qui sono riportate le prime righe.

	A	B	C	D	E
1	Angolo x (in gradi)	Base minore	Base maggiore	Altezza	Area della sezione
2	1	3	8,999086171	0,05235722	0,314119393
3	2	3	8,996344962	0,10469849	0,627999602
4	3	3	8,991777209	0,15700787	0,941401691
5	4	3	8,985384302	0,20926942	1,254087218
6	5	3	8,977168189	0,26146723	1,565818484

Segui queste indicazioni.

1. Inserisci rispettivamente i valori `1` e `3` nelle celle **A2** e **B2**.
2. Inserisci nella cella **C2** la formula che calcola la misura della base maggiore del trapezio che rappresenta la sezione del canale nel caso in cui la misura x dell'angolo sia quella indicata nella cella **A2**. A tale scopo verifica anzitutto che la misura della base maggiore del trapezio, espressa in funzione di x, è:

   $$3 + 6\cos x$$

   La formula da inserire nella cella **C2** è quindi:

   ```
   =3+6*COS(RADIANTI(A2))
   ```

   Osserva che è necessario utilizzare la funzione predefinita `RADIANTI()`, che trasforma una misura in gradi in radianti, perché la funzione predefinita `COS()` agisce su argomenti in radianti, mentre la misura in **A2** è in gradi.

Ricorda

In base al primo teorema sui triangoli rettangoli la misura di un cateto è uguale a quella dell'ipotenusa, moltiplicata per il seno dell'angolo opposto al cateto o per il coseno dell'angolo acuto adiacente al cateto stesso.

3. Inserisci nella cella **D2** la formula che calcola la misura dell'altezza del trapezio che rappresenta la sezione del canale nel caso in cui la misura x dell'angolo sia quella indicata nella cella **A2**. A tale scopo, procedi similmente al punto **2**; questa volta dovrai utilizzare la funzione predefinita `SEN()` che calcola il seno di un angolo data la sua misura in radianti.
4. Inserisci nella cella **E2** la formula che calcola l'area del trapezio i cui lati hanno le misure indicate sulla riga **2**.
5. Inserisci nella cella **A3** la formula `=A2+1` che incrementa di 1° la misura nella cella **A2**.
6. Copia sulla riga **3** le celle della zona **B2:E2**.
7. Copia la riga **3** nelle righe sottostanti fino alla **91** (in modo da descrivere, a passi di 1°, tutte le possibili ampiezze tra 0° e 90°).

In base all'analisi dei dati che puoi leggere nelle celle della colonna **E**, formula una congettura sul valore di x per cui è massima l'area della sezione del canale.

B. APPROCCIO GRAFICO (CON GEOGEBRA)

a. Verifica che l'area $A(x)$ della sezione è data da: $A(x) = 9 \sin x(1 + \cos x)$.
b. Traccia, utilizzando GeoGebra, il grafico della funzione $A(x)$ nell'intervallo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ e formula una congettura sul valore di x in corrispondenza del quale la funzione assume il valore massimo in tale intervallo. La congettura è in accordo con quella ottenuta tramite l'analisi numerica?

C. APPROCCIO ALGEBRICO (CON GLI STRUMENTI DELL'ANALISI)

Determina, con gli strumenti dell'analisi, il massimo della funzione $A(x)$ che esprime l'area della sezione nell'intervallo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Verifica che il risultato trovato è in accordo con le congetture formulate ai passi precedenti.

Attività proposte

1 Considera una circonferenza di centro O e raggio 2 e un punto A, esterno alla circonferenza, distante 8 da O. Detto P un punto sulla circonferenza, sia Q il simmetrico di P rispetto alla retta OA. In corrispondenza di quale posizione di P l'area del triangolo PAQ è massima?

a. Costruisci con GeoGebra una figura che ti permetta di esplorare il problema e formulare una congettura sulla posizione di P che rende massima l'area di PAQ.
b. Indicata con x la distanza di PQ da O, esprimi in funzione di x l'area del triangolo PAQ e determina, con gli strumenti dell'analisi, per quale valore di x tale area è massima. Confronta il risultato trovato con quanto congetturato al punto **a.** e verifica la bontà della tua congettura.

2 **a.** Traccia con GeoGebra i grafici delle due funzioni $f(x) = x^4 - 2x^2$ e $g(x) = 2x^2$. Tra i punti di intersezione dei grafici di f e g, indica con A quello (diverso dall'origine O) appartenente al primo quadrante.
b. Considera un punto P sull'arco $\overset{\frown}{OA}$ del grafico di f e traccia la retta parallela all'asse y passante per P, indicando con Q il suo punto di intersezione con il grafico della funzione g.
c. Traccia le rette r ed s tangenti ai grafici di f e di g rispettivamente in P e Q.
d. Facendo variare il punto P sull'arco $\overset{\frown}{OA}$ del grafico di f, formula una congettura sulla posizione del punto P sull'arco $\overset{\frown}{OA}$ per cui è massima la lunghezza del segmento PQ. In corrispondenza di tale posizione di P, come ti sembrano risultare le due rette r ed s?
e. Verifica le congetture formulate nel punto **d** con gli strumenti dell'analisi.