

Fila A

Cognome Nome

Tempo: 2 ore

Classe Data

Problema

Considera la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} (x - b)^2 & \text{se } x \leq 2 \\ e^{a(x-2)} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

- Determina i valori di a e b positivi in modo che $f(x)$ sia continua e derivabile nel suo dominio.
- Traccia il grafico della funzione $y = f(x)$ ottenuta in corrispondenza dei valori a e b trovati.
- Traccia il grafico della funzione $y = f(|x|)$ e stabilisci in quali punti è derivabile.
- Determina l'area del triangolo limitato dalle due tangenti nel punto angoloso A di $f(|x|)$ e dall'asse x . Dimostra che la tangente sinistra al grafico di $f(|x|)$ in A è parallela a quella nel punto di ascissa 2. In quale punto la tangente al grafico di $f(|x|)$ è parallela alla tangente destra in A ?
- Calcola $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln^2 x}$.

Quesiti

- 1** Verifica che le curve di equazioni

$$f(x) = 1 + \ln(2x+3) \text{ e } g(x) = \sqrt{4x+5}$$

sono tra loro tangenti e determina le coordinate del punto comune e l'equazione della tangente comune.

- 2** Mostra che la funzione $f(x) = xe^x$ è invertibile in \mathbb{R}^+ e calcola la derivata della funzione inversa $f^{-1}(y)$ in $y = e$.

- 3** Per quale valore di a le curve di equazioni

$$y = ax - 4x^2 \text{ e } y = \sqrt{x^2 + 3}$$

sono ortogonali?

- 4** Dimostra, utilizzando la definizione, che la derivata di $f(x) = \sqrt{2x}$ è $\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

- 5** Scrivi l'equazione della funzione polinomiale di quarto grado pari tale che sia:

$$f(1) = 0 \quad f'(1) = 2 \quad f''(1) = 18$$

Come risulta la retta tangente al grafico nel punto di intersezione con l'asse y ?

Fila B

Cognome Nome

Tempo: 2 ore

Classe Data

Problema

Considera la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(2-x) + b & \text{se } x < 1 \\ x^2 + ax & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

- Determina i valori di a e b in modo che $f(x)$ sia continua e derivabile nel suo dominio.
- Traccia il grafico della funzione $y = f(x)$ ottenuta in corrispondenza dei valori a e b trovati.
- Traccia il grafico della funzione $y = |f(x)|$ e scrivi le coordinate dei punti angolosi A e B con $x_A < x_B$.
- Scrivi le equazioni delle due tangenti al grafico di $|f(x)|$, destra e sinistra nel punto B .
- Dimostra che la tangente destra t al grafico di $|f(x)|$ in B è perpendicolare a quella nel punto C di ascissa $\frac{5}{3}$. Determina l'area del triangolo che la retta t forma con gli assi cartesiani.
- Calcola $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)}{e^{x-3} - 1}$.

Quesiti

1 Verifica che le curve di equazioni $f(x) = e^x + 2$ e $g(x) = 3\sqrt[3]{x+1}$ sono tra loro tangenti e determina le coordinate del punto comune e l'equazione della tangente comune.

2 Mostra che la funzione $f(x) = x + 2e^x$ è invertibile in \mathbf{R} e calcola la derivata della funzione inversa $f^{-1}(y)$ in $y = 2$.

3 Per quale valore di a le curve di equazioni $y = 2(x+a)^2$ e $y = \sqrt[3]{3x+2}$ sono ortogonali?

4 Dimostra, utilizzando la definizione, che la derivata di $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ è $-\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$.

5 Scrivi l'equazione della funzione polinomiale di terzo grado tale che sia:

$$f(0) = -4 \quad f(1) = 0 \quad f'(-2) = 0 \quad f''(1) = 12$$

Come risulta la retta tangente al grafico nel punto di intersezione con l'asse y ?