PROVE DI VERIFICA

PROVA DI VERIFICA **31A**

Teoremi sulle funzioni derivabili

Fila A	Cognome	Nome ....
Tempo: 2 ore	Classe	Data ....

Problema

Rispetto a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) considera la funzione:

$$y = \frac{ax^3 + ax + 1}{ax^2 + ax + 1} \text{ con } a \neq 0$$

a. Verifica che, per $a \neq 0$, si ottengono funzioni i cui grafici:
– hanno tutte lo stesso asintoto obliquo;
– incontrano la retta di equazione $y = 1$ negli stessi punti A e B con $x_A < x_B$, in uno dei quali sono tangenti.

b. Determina per quali valori di a le funzioni hanno uno o due asintoti verticali o nessuno.

c. Scrivi l'equazione della funzione f che ha un solo asintoto verticale, dimostra che il grafico della funzione f interseca l'asse x in un solo punto C e calcola l'ascissa di C con una cifra decimale esatta.

d. Traccia il grafico probabile della funzione f.

e. Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione in B e determina le coordinate dell'altro punto di intersezione.

f. Deduci dal grafico di f quello delle funzioni:

$$y = \frac{|4x^3 + 4x + 1|}{(2x+1)^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{1 - 4x - 4x^3}{(1-2x)^2}$$

Quesiti

1 Trova per quale valore di a la funzione $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + ax$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[0, 3]$. In corrispondenza del valore trovato determina i punti c di cui il teorema garantisce l'esistenza.

2 Stabilisci in quale dei due intervalli $[0, 3]$, $[3, 5]$ è applicabile il teorema di Lagrange alla funzione $y = \sqrt{3x|x-4|}$. Determina in tale intervallo il punto (o i punti) di Lagrange.

3 In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ considera un punto P. Sia Q il punto dell'arco AP tale che sia $P\widehat{A}Q \cong B\widehat{A}P$. Determina l'angolo $B\widehat{A}P$ in modo che il perimetro del quadrilatero $ABPQ$ sia massimo.

4 Calcola i due seguenti limiti utilizzando, se possibile, il teorema di de l'Hôpital.

a. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{2x}$ **b.** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$

5 Data la funzione $f(x) = x - 5\ln(x^2 + 16)$ determina:

a. il più ampio intervallo I contenente $x = 1$ in cui la funzione è invertibile;

b. la derivata $g'(-5\ln 16)$, detta $g(y)$ la funzione inversa in I;

c. il più ampio intervallo in cui la funzione è concava.

PROVA DI VERIFICA **31B**

Teoremi sulle funzioni derivabili

Fila B	Cognome	Nome ....
Tempo: 2 ore	Classe	Data ....

Problema

Rispetto a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) considera la funzione:

$$y = \frac{3x^3 + x^2 + a}{3x^2 + 3a}$$

a. Determina il valore $\overline{a}$ di a per cui si ottiene una retta e verifica che, per $a \neq \overline{a}$, si ottengono funzioni i cui grafici:
- hanno tutti lo stesso asintoto obliquo;
- incontrano l'asse y in uno stesso punto A in cui sono tangenti tra loro.

b. Determina per quali valori di a le funzioni hanno uno o due asintoti verticali o nessuno.

c. Scrivi l'equazione della funzione f il cui grafico passa per il punto $B(2, 3)$, dimostra che il grafico della funzione f interseca l'asse x in un solo punto C e calcola l'ascissa di C con una cifra decimale esatta.

d. Traccia il grafico probabile della funzione f.

e. Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione in B e determina le coordinate dell'altro punto di intersezione.

f. Deduci dal grafico di f quello delle funzioni:

$$y = \frac{3x^3 + x^2 - 1}{|3x^2 - 3|} \quad \text{e} \quad y = \frac{3x^3 + x^2 - 1}{3 - 3x^2}$$

Quesiti

1 Trova per quale valore di a la funzione $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2 + ax}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-3, -2]$. In corrispondenza del valore trovato determina i punti c di cui il teorema garantisce l'esistenza.

2 Stabilisci in quale dei due intervalli $[-2, 2]$, $[0, 2]$ è applicabile il teorema di Lagrange alla funzione $y = \sqrt{3x^2 + 2|x|}$. Determina in tale intervallo il punto (o i punti) di Lagrange.

3 In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ considera un punto P. Traccia la bisettrice dell'angolo $B\widehat{A}P$, che intersechi la semicirconferenza in un punto Q. Determina l'angolo $B\widehat{A}P$ in modo che l'area del quadrilatero $ABQP$ sia massima.

4 Calcola i due seguenti limiti utilizzando, se possibile, il teorema di de l'Hôpital.

a. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$ **b.** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \frac{1}{x}}{e^x - 1}$

5 Data la funzione $f(x) = 17x - x^2 - 8 \ln x$ determina:

a. il più ampio intervallo I contenente $x = 1$ in cui la funzione è invertibile;

b. la derivata $g'(16)$, detta $g(y)$ la funzione inversa in I;

c. il più ampio intervallo in cui la funzione è convessa.