

<b>Fila A</b>	Cognome .....	Nome .....
Tempo: 2 ore	Classe .....	Data .....

## Problema

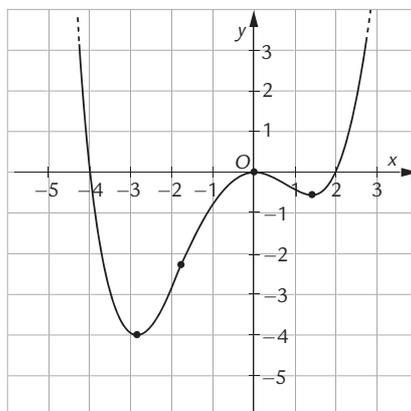
Considera la famiglia di funzioni:

$$f(x) = \frac{2x^2 + k(3x - 1)}{(x - 1)^3}$$

- a. Dimostra che i grafici delle funzioni della famiglia passano tutti per uno stesso punto  $P$ , di cui si chiedono le coordinate.
- b. Discuti, al variare di  $k$ , l'esistenza e il numero delle intersezioni dei grafici delle funzioni della famiglia con l'asse  $x$ .
- c. Discuti, al variare di  $k$ , l'esistenza e il numero dei punti di estremo relativo dei grafici delle funzioni della famiglia e scrivi l'equazione cartesiana del luogo dei punti di estremo relativo. Verifica che il punto  $P$  appartiene al luogo e che è un punto di minimo relativo.
- d. Dimostra che i grafici delle funzioni della famiglia hanno almeno un punto di flesso.
- e. Determina il valore di  $k$  in modo che il grafico della funzione abbia un minimo nel punto di ascissa  $-\frac{7}{2}$ , poi traccia il grafico della corrispondente funzione  $y = f(x)$ , tralasciando lo studio di  $y''$ , e determina le coordinate dei suoi punti di intersezione con l'asse  $x$ ,  $A$  e  $B$ , con  $x_A < x_B$ .
- f. Scrivi l'equazione della circonferenza tangente in  $A$  al grafico della funzione studiata nel punto precedente e passante per  $B$ .
- g. Deduci dal grafico della funzione studiata nel punto e. quello di  $y = e^{f(x)}$ .

## Quesiti

- 1 In figura è tracciato il grafico di  $y = f(x)$ .



- a. Deduci il grafico di  $y = f(2 - x)$ .
- b. Deduci il grafico di  $y = f'(x)$ .
- c. Discuti, al variare di  $k$ , l'esistenza e il numero di soluzioni dell'equazione  $f(x) = k$ .

- 2** Determina il dominio della funzione  $y = \sqrt{x^2 - |5x - 6|}$ . Per quali valori di  $x$  la funzione non è derivabile?
- 3** Dopo avere determinato le soluzioni dell'equazione  $2 \ln(x + 2) - x - 1 = 0$  con due cifre decimali esatte, scrivi le equazioni degli asintoti della funzione  $y = \frac{x + 1}{2 \ln(x + 2) - x - 1}$ .
- 4** Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, giustificalle, altrimenti esibisci un controesempio. Supponi che  $y = f(x)$  sia una funzione derivabile in  $\mathbf{R}$ .
- Se il grafico della funzione  $y = f(x)$  ha un asintoto obliquo di equazione  $y = mx + q$ , e se esiste il  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ , allora  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = m$ .
  - Se la funzione  $y = f(x)$  è positiva e strettamente crescente nel suo dominio, anche  $y = \ln f(x)$  lo è.
  - Se  $f'(x_0) = 0$  e  $f(x_0) \neq 0$ , allora  $x_0$  è un punto di estremo relativo per la funzione  $y = \frac{1}{f(x)}$ .
  - La funzione  $y = |f(x)|$  non è mai derivabile nei punti in cui il grafico della funzione  $y = f(x)$  attraversa l'asse  $x$ .
  - La funzione  $y = \sqrt{|f(x)|}$  ha lo stesso dominio della funzione  $y = f(x)$ .
- 5** In una circonferenza  $\gamma$  di raggio unitario considera una corda  $AB$  e i due triangoli isosceli  $ABC$  e  $ABD$  in essa inscritti e aventi  $AB$  come base comune e altezze rispettivamente  $CH$  e  $DH$  con  $CH > DH$ . Posto  $\overline{AB} = 2x$ , esprimi in funzione di  $x$  la differenza tra le aree di  $ABC$  e  $ABD$ , poi traccia il grafico completo della funzione ottenuta, mettendo in evidenza il tratto relativo al problema.

<b>Fila B</b>	Cognome .....	Nome .....
Tempo: 2 ore	Classe .....	Data .....

## Problema

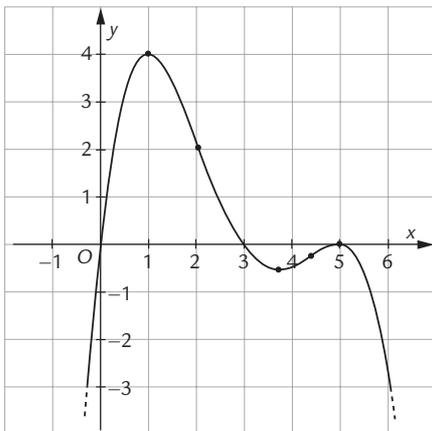
Considera la famiglia di funzioni:

$$f(x) = \frac{16x^2 + k(x - 1)}{(3 - x)^3}$$

- a. Dimostra che i grafici delle funzioni della famiglia passano tutti per uno stesso punto  $P$ , di cui si chiedono le coordinate.
- b. Discuti, al variare di  $k$ , l'esistenza e il numero delle intersezioni dei grafici delle funzioni della famiglia con l'asse  $x$ .
- c. Discuti, al variare di  $k$ , l'esistenza e il numero dei punti di estremo relativo dei grafici delle funzioni della famiglia e scrivi l'equazione cartesiana del luogo dei punti di estremo relativo. Verifica che il punto  $P$  appartiene al luogo e che è un punto di massimo relativo.
- d. Dimostra che i grafici delle funzioni della famiglia hanno almeno un punto di flesso.
- e. Determina il valore di  $k$  in modo che il grafico della funzione abbia un massimo di ascissa  $-7$ , poi traccia il grafico della corrispondente funzione  $y = f(x)$ , tralasciando lo studio di  $y''$  e determina le coordinate dei suoi punti  $A$  e  $B$ , con  $x_A < x_B$ , di intersezione con l'asse  $x$ .
- f. Scrivi l'equazione della circonferenza tangente in  $A$  al grafico della funzione studiata nel punto precedente e passante per  $B$ .
- g. Deduci dal grafico della funzione studiata nel punto e. quello di  $y = \frac{1}{f(x)}$ .

## Quesiti

- 1 In figura è tracciato il grafico di  $y = f(x)$ .



- a. Deduci il grafico di  $y = 2 - f(x)$ .
- b. Deduci il grafico di  $y = f'(x)$ .
- c. Discuti, al variare di  $k$ , l'esistenza e il numero di soluzioni dell'equazione  $f(x) = k$ .

- 2** Determina il dominio della funzione  $y = \sqrt{|x^2 - 16| - 6x}$ . Per quali valori di  $x$  la funzione non è derivabile?
- 3** Dopo avere determinato le soluzioni dell'equazione  $e^{2-x} + 2x - 5 = 0$  con almeno due cifre decimali esatte, scrivi le equazioni degli asintoti della funzione  $y = \frac{x-2}{e^{2-x} + 2x - 5}$ .
- 4** Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, giustificalle, altrimenti esibisci un controesempio. Supponi che  $y = f(x)$  sia una funzione derivabile in  $\mathbf{R}$ .
- Se  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = m$ , allora la funzione  $y = f(x)$  ha un asintoto obliquo di coefficiente angolare  $m$ .
  - Se la funzione  $y = f(x)$  è strettamente crescente in tutto il suo dominio, anche  $y = e^{f(x)}$  lo è.
  - Se la funzione  $y = f(x)$ , derivabile nel suo dominio, ha un punto di massimo in  $x_0$  ed è diversa da zero, allora la funzione  $y = \frac{1}{f(x)}$  ha in  $x_0$  un punto di minimo.
  - La funzione  $y = \sqrt{f(x)}$  non è mai derivabile nei punti in cui il grafico della funzione  $y = f(x)$  incontra l'asse  $x$ .
  - La funzione  $y = \ln |f(x)|$  ha lo stesso dominio della funzione  $y = f(x)$ .
- 5** Su una semicirconferenza di diametro  $\overline{AB} = 2$ , considera un punto  $P$ . Posto  $\overline{AP} = x$ , esprimi in funzione di  $x$  la misura della distanza di  $P$  dal diametro  $AB$  e traccia il grafico completo della funzione ottenuta, mettendo in evidenza il tratto relativo al problema.