Prova intermedia di verifica - 1

Unità 5 - Il concetto di derivata e il calcolo delle derivate

1 Calcola, in base alla *definizione*, la derivata della funzione $f(x) = x^2$ nel punto $x_0 = 2$.

Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

2 $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(x+1)^2}$

3 $f(x) = \sin^3(\sqrt{x})$

4 $f(t) = \sin(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t + \varphi)$

5 $f(x) = \dfrac{1}{x^2 e^{2x}}$

6 $f(k) = \sqrt{k^3 \ln k}$

7 Data la funzione $f(x) = \dfrac{e^x + e^{2x}}{e^{3x}}$, calcola $f''(0)$.

8 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \dfrac{(x^2-1)^2}{x^3}$ nel suo punto di ascissa 2.

9 Esprimi il limite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h}\left[\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6} + h\right) - \dfrac{1}{4}\right]$ sotto forma di derivata di una funzione in un punto opportuno, quindi calcolane il valore sfruttando le regole di derivazione.

Le soluzioni sono alla pagina seguente

Soluzioni

1 In base alla definizione, $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h\to 0} h + 4 = 4.$

2 $f'(x) = \frac{2(x-1)}{(x+1)^3}$

3 $f'(x) = \frac{3\sin^2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

4 $f'(t) = \omega\cos(\omega t + \varphi) - \omega\sin(\omega t + \varphi)$

5 $f'(x) = -\frac{2(x+1)}{x^3 e^{2x}}$

6 $f'(k) = \frac{k(3\ln k + 1)}{2\sqrt{k\ln k}}$

7 $f''(0) = 5$

8 $y = \frac{21}{16}x - \frac{3}{2}$

9 Il limite assegnato è il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale della funzione $f(x) = \sin^2 x$ relativo al punto $x_0 = \frac{\pi}{6}$, quindi il risultato del limite è $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Poiché $f'(x) = 2\sin x\cos x$, abbiamo che $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, quindi il risultato del limite è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.