Unità 6 - Teoremi di Rolle e di Lagrange, studio di massimi e minimi

1 Determina a, b e c in modo che la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 3 & -1 \le x < 0 \\ b \tan x + c & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

soddisfi le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $\left[-1, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

2 Data la funzione $y = ax^3 + bx + 1$, con $a \neq 0$, determina quali condizioni devono soddisfare a e b affinché $x = -1$ sia un punto di *minimo* relativo per la funzione.

3 Tra le rette passanti per $P(1, 2)$ che intersecano l'asse x in un punto A di ascissa positiva e l'asse y in un punto B di ordinata positiva, determina quella per cui è minima l'area del triangolo AOB, essendo O l'origine degli assi.

4 Data la funzione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determina a, b, c e d in modo che essa sia dispari e che il suo grafico abbia un punto di estremo relativo di coordinate $(2, 4)$.

5 Considera la funzione $f(x) = 2x + |x^3 - 1|$. Stabilisci se è applicabile il teorema di Lagrange nei due intervalli $[-1, 1]$ e $[0, 2]$; in caso affermativo, determina il punto (o i punti) di cui il teorema garantisce l'esistenza.

6 Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & 0 \le x \le 2 \\ |x - 4| & 2 < x \le 7 \end{cases}$. Stabilisci:

- **a.** se è continua in $[0, 7]$;
- **b.** se è derivabile in $[0, 7]$;
- **c.** se esistono minimo e massimo assoluti e, in caso affermativo, i loro valori.

7 Determina per quali valori di a la funzione:

$$y = x^3 - ax^2 + x + 1$$

è strettamente crescente in $\mathbf{R}$.

8 Sia ABC un triangolo isoscele sulla base AB, in cui i lati obliqui misurano a e $A\widehat{B}C = B\widehat{A}C = x$. Determina x in modo che sia massima la somma delle misure delle tre altezze del triangolo.

9 L'illuminazione di un oggetto da parte di una sorgente luminosa è direttamente proporzionale all'intensità della sorgente e inversamente proporzionale al quadrato della distanza dell'oggetto dalla sorgente. Due sorgenti luminose, una otto volte più intensa dell'altra, sono separate da una distanza di 12 m. Dove deve essere posto un oggetto, sulla linea retta che congiunge i punti in cui si trovano le due sorgenti, perché la sua illuminazione sia la minima possibile?

10 Determina h e k in modo che la funzione:

$$y = x^3 + hx^2 + kx + 1$$

presenti per $x = 2$ un punto di flesso a tangente orizzontale.

Le soluzioni sono alla pagina seguente

Soluzioni

Unità 6 - Teoremi di Rolle e di Lagrange, studio di massimi e minimi

1 Imponendo le tre condizioni: $f(-1) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$, si trova che deve essere $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$.

2 Il punto $x = -1$ deve anzitutto essere stazionario, da cui la condizione $b = -3a$; per studiare il segno della derivata prima occorre distinguere i due casi $a > 0$ e $a < 0$: distinguendo i due casi, si vede che affinché $x = -1$ sia un punto di minimo deve essere $a < 0$. In definitiva le condizioni sono: $b = -3a \wedge a < 0$.

3 Sia $y - 2 = m(x - 1)$ una generica retta passante per $P(1, 2)$; affinché la retta intersechi i semiassi delle ascisse e delle ordinate positive deve essere $m < 0$; la funzione che esprime l'area del triangolo AOB è $A(m) = -\frac{(m-2)^2}{2m}$ e il minimo si ottiene per $m = -2$. Sostituendo nell'equazione della retta questo valore di m, si trova che la retta cercata ha equazione $y = -2x + 4$.

4 Deve essere $b = d = 0$ affinché la funzione sia dispari; imponendo le condizioni $f'(2) = 0$, $f(2) = 4$ si trovano poi i valori di a e c; si trova che deve essere: $a = -\frac{1}{4}$, $b = 0$, $c = 3$, $d = 0$.

5 Il teorema è applicabile nell'intervallo $[-1, 1]$, mentre non lo è nell'intervallo $[0, 2]$, perché la funzione non è derivabile per $x = 1$. Relativamente all'intervallo $[-1, 1]$, $|x^3 - 1| = 1 - x^3$, quindi l'espressione analitica della funzione può essere riscritta nella forma $f(x) = -x^3 + 2x + 1$. I punti di Lagrange sono $c = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6 **a.** La funzione è certamente continua per $x \neq 2$; si verifica che è continua anche per $x = 2$, quindi è continua in $[0, 7]$.
b. La funzione è derivabile per $x \neq 2$ e $x \neq 4$, dove presenta dei punti angolosi.
c. Essendo la funzione continua nell'intervallo $[0, 7]$, per il teorema di Weierstrass esistono certamente minimo e massimo assoluti della funzione. Questi ultimi vanno cercati tra i punti stazionari di f, tra i punti di non derivabilità e tra gli estremi dell'intervallo $[0, 7]$; si trova che il minimo assoluto è -2 e viene assunto in corrispondenza del punto stazionario $x = 1$, mentre il massimo assoluto è 3 e viene assunto in corrispondenza del punto $x = 7$, estremo dell'intervallo dove è definita la funzione. Vedi anche il grafico in fig. 1.

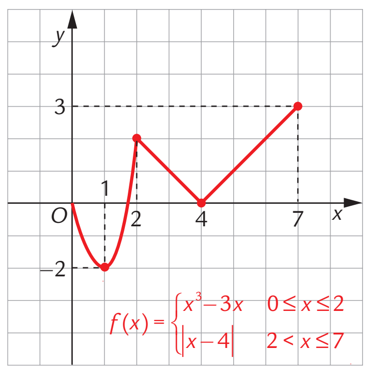

Figura 1

7 Affinché la funzione sia strettamente crescente in **R** la sua derivata prima $y' = 3x^2 - 2ax + 1$ deve essere maggiore o uguale a 0 per ogni $x \in \mathbf{R}$; ciò accade quando il discriminante dell'equazione $3x^2 - 2ax + 1 = 0$ è minore o uguale a zero, cioè per $-\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$.

8 La funzione che esprime la somma delle misure delle altezze è $y = a(2\sin 2x + \sin x)$; il massimo è per:

$$x = \arccos\left(\frac{\sqrt{129} - 1}{16}\right)$$

9 Detta x la distanza dell'oggetto dalla sorgente di minore intensità e i l'intensità di questa sorgente, la funzione da rendere minima è $y = \frac{i}{x^2} + \frac{8i}{(12-x)^2}$. Il minimo viene raggiunto per $x = 4$, cioè quando l'oggetto si trova a 4 m dalla sorgente di minore intensità.

10 Affinché la funzione data presenti un punto di flesso a tangente orizzontale per $x = 2$ la sua derivata prima $y' = 3x^2 + 2hx + k$ deve avere per $x = 2$ una soluzione doppia; ciò si verifica se e solo se la derivata si annulla per $x = 2$ e il discriminante dell'equazione $3x^2 + 2hx + k = 0$ è zero. Imponendo queste due condizioni si trova che deve essere $h = -6$, $k = 12$.