Prova intermedia di verifica - 1

Unità 7 - Studio di funzioni

Studia le seguenti funzioni e tracciane il grafico.

1 $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3$

2 $y = \frac{x^3 + 2}{(x+1)^2}$ (Tralascia lo studio di y'')

3 $y = \sqrt[3]{4x - x^3}$

4 $y = xe^{\frac{1}{x-2}}$ (Tralascia lo studio di y'')

5 $y = \frac{x}{\ln x}$

6 $y = \frac{e^x}{x + e^x}$ (Tralascia lo studio di y'')

7 $y = \sin x + \frac{1}{2}x$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$

8 Traccia, al variare di $k \in \mathbf{R}$, un grafico qualitativo delle curve di equazione $y = x^4 - 2kx^2$.

9 Considera una semicirconferenza di diametro AB, centro O e raggio 1. Traccia la semiretta di origine B perpendicolare ad AB, che giace, rispetto alla retta AB, dalla stessa parte della semicirconferenza e considera su di essa il punto P tale che $\overline{BP} = x$. Indica con Q il punto in cui OP interseca la semicirconferenza e con H la proiezione di Q su AB. Esprimi $y = \overline{OH} + \overline{QH}$ in funzione di x e traccia il grafico della funzione ottenuta, indipendentemente dalle limitazioni geometriche, mettendo in evidenza il tratto del grafico relativo al problema.

10 Considera la parabola di equazione $y = x^2 - 2x$ e indica con V il suo vertice. Sia P un punto della parabola di ascissa t. Tracciata la retta r, passante per P e parallela alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, indica con Q il suo ulteriore punto di intersezione con la parabola. Esprimi in funzione di t l'area del triangolo PQV. Traccia il grafico della funzione ottenuta, in un sistema di assi cartesiani tOy.

Le soluzioni sono alla pagina seguente

Soluzioni

1 Vedi il grafico in fig. 1.

2 Vedi il grafico in fig. 2.

3 Vedi il grafico in fig. 3.

4 Vedi fig. 4. Puoi verificare che $\lim_{x \to 2^-} f'(x) = 0$, quindi il grafico della funzione si avvicina a $x = 2$ da sinistra con tangente orizzontale. Da ciò si può prevedere l'esistenza di almeno un punto di flesso.

5 Vedi grafico in fig. 5. Per $x = e^2$ la funzione presenta un punto di flesso.

6 Lo studio della condizione $e^x + x \neq 0$ (per la ricerca del dominio) va effettuata per via grafica. Si trova così che il dominio della funzione è $\mathbf{R} - \{\alpha\}$ con $\alpha \in (-1, 0)$. Osserva che $y = 1$ è asintoto orizzontale destro, mentre l'asse x è asintoto orizzontale sinistro. Il grafico che si ottiene è quello in fig. 6.

7 Vedi il grafico in fig. 7. Osserva che si tratta di una funzione **non** periodica.

8 I grafici qualitativi delle funzioni della famiglia al variare di k sono quelli riportati in figg. 8 e 9.

9 $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$; asintoti: $y = 1$ (destro); $y = -1$ (sinistro); massimo: $(1, \sqrt{2})$; flessi per $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$

10 La funzione Area è:

$$y = \frac{1}{2}|(t-1)(t-2)(2t-3)|$$

Essa presenta due massimi per $t = \dfrac{9 \pm \sqrt{3}}{6}$ e tre punti angolosi, per $t = 1$, $t = \dfrac{3}{2}$ e $t = 2$.

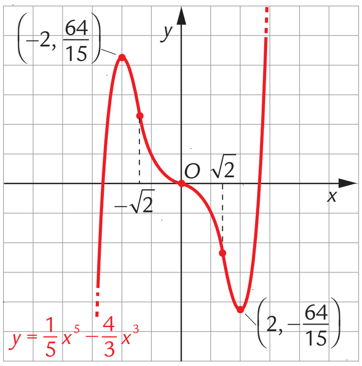

Figura 1

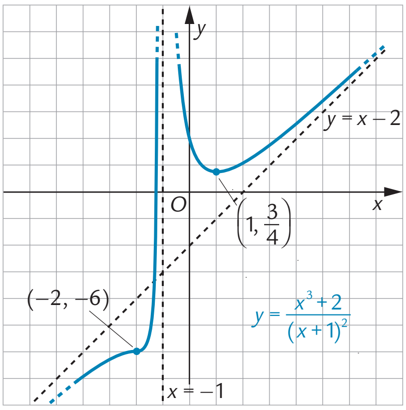

Figura 2

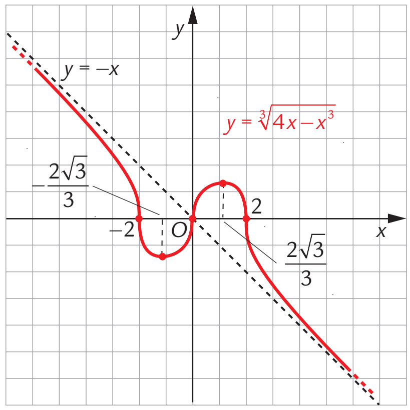

Figura 3

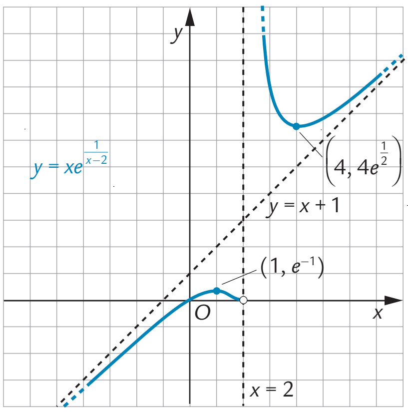

Figura 4

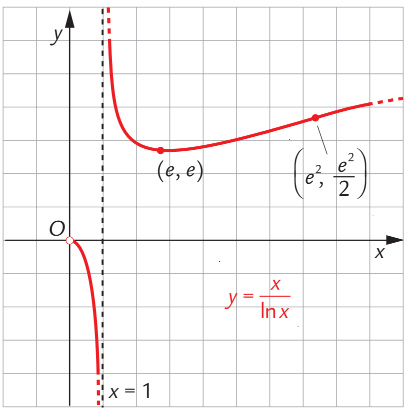

Figura 5

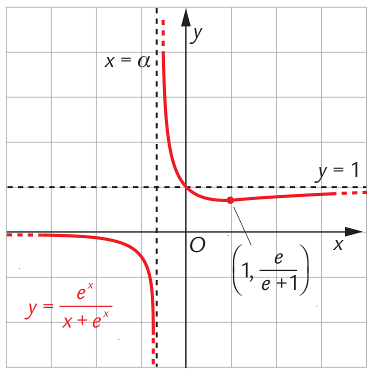

Figura 6

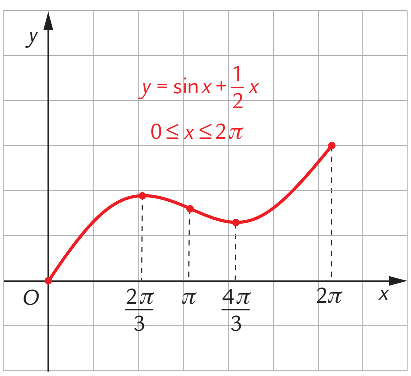

Figura 7

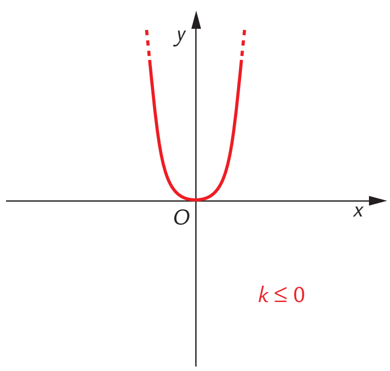

Figura 8

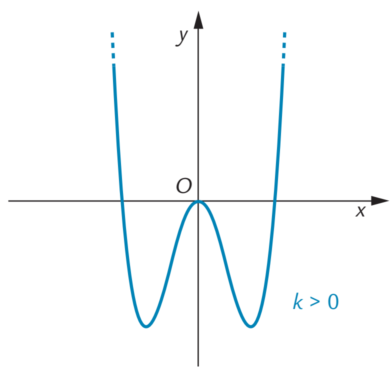

Figura 9