Unità 5 - Studio dei punti di non derivabilità e applicazioni delle derivate

1 Considera la funzione $f(x) = \begin{cases} e^{kx} - 1 & x < 0 \\ kx^2 - 2x & x \geq 0 \end{cases}$, con $k \in \mathbf{R}$.

a. Verifica che per ogni valore di k è continua in $\mathbf{R}$.

b. Stabilisci se esiste $k \in \mathbf{R}$ per cui la funzione f è anche derivabile in $\mathbf{R}$.

2 Determina i coefficienti a, b, c e d in modo che la curva di equazione $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ soddisfi le seguenti proprietà:

a. passa per l'origine e ivi ha come tangente una retta parallela alla retta di equazione $y = -2x + 1$;

b. passa per il punto di coordinate $(1, 0)$ e ivi ha tangente orizzontale.

3 Determina per quale valore di k sono tangenti le curve di equazioni:

$f(x) = 4 \arctan x$ e $g(x) = k + 2 \ln x$

4 Scrivi l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = e^{1-x}$ e passante per l'origine.

5 Verifica che per ogni $a \in \mathbf{R}$ le due curve di equazioni $y = x^3 - 1$ e $y = ax^2 - a$ passano per il punto $P(1, 0)$. Determina a in modo che siano *ortogonali* in P.

6 Una sola delle seguenti funzioni **non** è derivabile in $x = 0$. Individua quale e specifica di quale natura è il punto di non derivabilità.

a. $f(x) = |x|^3$

b. $f(x) = |x|^{\frac{2}{3}}$

c. $f(x) = |x|^4$

d. $f(x) = |x|^{\frac{3}{2}}$

7 Un corpo si muove in linea retta secondo la legge oraria $s = t^3 - 9t^2 + 24t$, con $t \geq 0$, dove t è misurato in secondi ed s in metri.

a. Trova la velocità e l'accelerazione all'istante t.

b. Calcola la velocità e l'accelerazione dopo 3 s.

c. In quali istanti il corpo è fermo?

8 Sia f una funzione derivabile nel punto x_0. Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere giustificale, altrimenti fornisci un controesempio.

a. f è continua in x_0. V F

b. La derivata di f è continua in x_0. V F

c. La funzione $|f|$ è continua in x_0. V F

d. La funzione $|f|$ è derivabile in x_0. V F

9 Fornisci l'esempio di due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$, derivabili in $\mathbf{R}$ e soddisfacenti la seguente proprietà: comunque scelti due punti P e Q, aventi la stessa ascissa e appartenenti rispettivamente al grafico di f e al grafico di g, le rette tangenti in P e Q a f e a g sono tra loro perpendicolari.

10 Un contenitore a forma di parallelepipedo viene riempito di acqua tramite un rubinetto a una velocità di $25\ \text{cm}^3/\text{min}$. Con quale velocità cresce l'altezza dell'acqua, se la base del contenitore è un rettangolo di lati 15 cm e 10 cm?

Le soluzioni sono alla pagina seguente

Soluzioni

1 La funzione è certamente continua in $\mathbf{R} - \{0\}$. Poiché $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$, la funzione è continua anche in $x = 0$, quindi è continua in $\mathbf{R}$. Analogamente, la funzione è certamente derivabile in $\mathbf{R} - \{0\}$; f è derivabile anche in $x = 0$ se e solo se $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$: questa condizione è verificata per $k = -2$.

2 La condizione **a** è verificata se e solo se $f(0) = 0$ e $f'(0) = -2$, da cui $c = -2$, $d = 0$. La condizione **b** è verificata se e solo se $f(1) = 0$ e $f'(1) = 0$, da cui $a = -2$, $b = 4$. In conclusione deve essere $a = -2$, $b = 4$, $c = -2$, $d = 0$.

3 Dobbiamo imporre le condizioni $f(x) = g(x)$ e $f'(x) = g'(x)$. La condizione $f'(x) = g'(x)$ equivale a $\frac{4}{1+x^2} = \frac{2}{x}$, da cui $x = 1$. La condizione $f(x) = g(x)$, per $x = 1$, equivale a $4 \arctan 1 = k + 2 \ln 1$, da cui si ricava che $k = \pi$.

4 L'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = e^{1-x}$ in un suo generico punto di ascissa t è $y - e^{1-t} = -e^{1-t}(x - t)$. Imponendo che questa retta passi per l'origine si ricava $t = -1$, quindi l'equazione della retta tangente è $y = -e^2 x$.

5 Bisogna imporre che il prodotto delle derivate delle due funzioni in $x = 1$ sia uguale a -1. Si ottiene così l'equazione $3 \cdot 2a = -1$, da cui $a = -\frac{1}{6}$.

6 L'unica funzione non derivabile in $x = 0$ è la **b**, che presenta in tale punto una cuspide. Tutte le altre funzioni sono derivabili in $x = 0$ con derivata nulla.

7 **a.** $v(t) = 3t^2 - 18t + 24$, $a(t) = 6t - 18$; **b.** $v(3) = -3$ m/s, $a(3) = 0$ m/s^2; **c.** $t_1 = 2$ s, $t_2 = 4$ s.

8 **a.** V; **b.** F (controesempio: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ e $x_0 = 0$); **c.** V; **d.** F (controesempio: $f(x) = x$ e $x_0 = 0$).

9 Osserva che, affinché sia soddisfatta la condizione espressa, deve risultare $f'(x) \cdot g'(x) = -1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Per esempio, due funzioni che soddisfano questa proprietà sono $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{-x}$.

10 Sia h l'altezza in cm dell'acqua contenuta nel recipiente, b l'area della base del recipiente e V il volume dell'acqua (in cm^3). Vogliamo calcolare $\frac{dh}{dt}$, conoscendo $\frac{dV}{dt}$. Osserviamo che $h = \frac{V}{b}$, dove V dipende dal tempo, mentre b è costante, quindi $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{b}\frac{dV}{dt}$. Poiché $b = 15 \cdot 10$ cm$^2 = 150$ cm^2 e $\frac{dV}{dt} = 25$ cm^3/min , abbiamo:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{b}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{150 \text{ cm}^2} \cdot 25 \text{ cm}^3/\text{min} = \frac{1}{6} \text{ cm/min} \simeq 0{,}17 \text{ cm/min}$$