Prova intermedia di verifica - 2

Unità 6 - Studio della concavità e dei punti di flesso, teoremi di Cauchy e di de l'Hôpital

1 Stabilisci se è applicabile il teorema di Cauchy alle funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$ nell'intervallo $[0, 1]$. In caso affermativo, determina i punti di cui il teorema stabilisce l'esistenza.

2 Data la funzione:

$$y = \begin{cases} x\sqrt[3]{\ln|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

a. verifica che è continua;

b. determina gli intervalli in cui è concava, quelli in cui è convessa e gli eventuali punti di flesso.

3 Determina i coefficienti a, b, c e d della funzione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ in modo che il suo grafico abbia un punto di estremo relativo nell'origine e un punto di flesso di coordinate $(1, -4)$.

Calcola i seguenti limiti, applicando il teorema di de l'Hôpital.

4 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^7 - \sqrt{x} - x + 1}{x^2 - \sqrt[3]{x} - x + 1}$

5 $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{1 - \cos x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$

6 $\lim\limits_{x \to 0} (2 \sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$

---

7 Individua a quale dei seguenti due limiti *non* è applicabile il teorema di de l'Hôpital; calcola quindi l'altro, utilizzando il teorema.

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 + x}{x + \sin x}$ **b.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x - \sin x}$

8 Determina k in modo che la funzione $y = x^4 - kx^3 + x^2$ sia convessa in $\mathbf{R}$.

9 Considera la funzione $y = \ln(x^2 + a^2)$, con $a > 0$. Determina per quale valore di a la tangente nel punto di flesso di ascissa positiva è parallela alla retta di equazione $y = 2x$.

10 Sia f una funzione dispari, derivabile in $\mathbf{R}$, con derivata continua, tale che $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{\sin 3x} = 6$. Qual è l'equazione della retta tangente al grafico di f nell'origine?

Le soluzioni sono alla pagina seguente

Soluzioni

Unità 6 - Studio della concavità e dei punti di flesso, teoremi di Cauchy e di de l'Hôpital

1 È applicabile e risulta $c = \frac{1}{4}\sqrt[3]{4}$.

2 **a.** Basta verificare che $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ (può essere utile a tale scopo utilizzare il teorema di de l'Hopital).

b. Si trova $y'' = \frac{3\ln|x| - 2}{9x\sqrt[3]{\ln^5|x|}}$, dal suo studio la funzione risulta convessa per $-e^{\frac{2}{3}} < x < -1 \vee 0 < x < 1 \vee x > e^{\frac{2}{3}}$, concava per $x < -e^{\frac{2}{3}} \vee -1 < x < 0 \vee 1 < x < e^{\frac{2}{3}}$; ci sono cinque punti di flesso: $x = 0$ e $x = \pm 1$ sono punti di flesso a tangente verticale, mentre $x = \pm e^{\frac{2}{3}}$ sono punti di flesso a tangente obliqua.

3 Imponendo le condizioni: $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(1) = 0$, $f(1) = -4$ si trova: $a = 2$, $b = -6$, $c = 0$, $d = 0$.

4 $\frac{33}{4}$

5 Osserva che $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 - 1 + \cos x}{x^2(1-\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 - 1 + \cos x}{x^4}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x} = 2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 - 1 + \cos x}{x^4}$; applicando a quest'ultimo limite due volte il teorema di de l'Hôpital si trova che il risultato è $+\infty$.

6 Osserva che $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(2\sin x + \cos x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(2\sin x+\cos x)}{x}}$. Applicando il teorema di de l'Hôpital si trova che $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(2\sin x + \cos x)}{x} = 2$, quindi il risultato del limite è e^2.

7 Il teorema di de l'Hôpital non è applicabile al limite **a**. Infatti:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2+x}{x+\sin x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}+1}{1+\frac{\sin x}{x}} = 1$$

(perché $\frac{2}{x}$ e $\frac{\sin x}{x}$ tendono a zero per $x \to +\infty$), mentre il limite del rapporto delle derivate, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\cos x}$, non esiste.
Il secondo limite si calcola applicando il teorema di de l'Hôpital due volte; si ottiene che il limite vale 6.

8 Bisogna imporre che la derivata seconda sia maggiore o uguale a 0 per ogni $x \in \mathbf{R}$; poiché $y'' = 2(6x^2 - 3kx + 1)$, questa condizione equivale a imporre che il discriminante dell'equazione $6x^2 - 3kx + 1 = 0$ sia minore o uguale a zero, da cui la condizione $-\frac{2\sqrt{6}}{3} \le k \le \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

9 Si verifica che la funzione ha due punti di flesso, di ascisse $x = \pm a$; nel punto di ascissa positiva, $x = a$, risulta $y'(a) = \frac{1}{a}$, quindi il coefficiente angolare della retta tangente nel punto di flesso è 2 se e solo se $a = \frac{1}{2}$.

10 Osserva che, essendo la funzione dispari, deve essere $f(0) = 0$; per il teorema di de l'Hôpital $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin 3x}$ è uguale a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{3\cos 3x}$ e, per la continuità di f', questo limite vale $\frac{f'(0)}{3}$. Per ipotesi sappiamo che è $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin 3x} = 6$, quindi deve essere $\frac{f'(0)}{3} = 6$, da cui $f'(0) = 18$. L'equazione della retta tangente al grafico di f nell'origine è allora $y = 18x$.