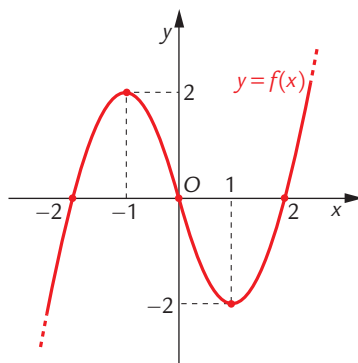


Unità 7 - Grafici deducibili e applicazioni dello studio di funzione

In figura è tracciato il grafico di una funzione $y = f(x)$ (l'origine è un punto di flesso).



1 Deduci il grafico di $y = -f(x + 1)$.

2 Deduci il grafico di $y = f'(x)$.

3 Deduci il grafico di $y = \frac{1}{f(x)}$.

4 Deduci il grafico di $y = e^{f(x)}$.

5 Deduci il grafico di $y = \ln f(x)$.

6 Sia $a \in \mathbf{R}$, con $a > 1$; dimostra che:

$$x^a - 1 \geq a(x - 1) \text{ per ogni } x \geq 0$$

7 Stabilisci il numero delle soluzioni dell'equazione $e^x - x^3 = 0$.

8 Discuti, al variare del parametro k , l'esistenza e il numero delle soluzioni dell'equazione $x^3 = k(x^2 - 1)$.

9 Stabilisci per quali valori di k l'equazione:

$$x^2 = \sqrt{x} + k$$

non ha soluzioni reali.

10 Discuti, al variare del parametro k , l'esistenza e il numero delle soluzioni dell'equazione $ke^{x^2} = 2x$ soddisfacenti la condizione $0 \leq x \leq 1$.

Soluzioni

1 Occorre applicare una traslazione di vettore $\vec{v}(-1, 0)$ e una simmetria rispetto all'asse x ; vedi fig. 1.

2 Vedi fig. 2.

3 Vedi fig. 3.

4 Vedi fig. 4.

5 Vedi fig. 5.

6 Consideriamo anzitutto la funzione ausiliaria $f(x) = x^a - 1 - a(x-1)$, con $a > 1$. È facile ricavare che: $f(0) = a - 1 > 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; inoltre, studiando le derivate, si deduce che la funzione presenta un punto di minimo relativo per $x = 1$, con $f(1) = 0$, e che la funzione è convessa. Un grafico qualitativo della funzione nell'intervallo $[0, +\infty)$ è quindi quello in fig. 6. Da esso si deduce che il punto di minimo relativo è anche di minimo assoluto, ossia: $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$. Ciò equivale alla tesi.

7 Si può osservare per esempio che l'equazione $e^x = x^3$ equivale a: $1 = x^3 e^{-x}$. Tracciando il grafico della funzione $y = x^3 e^{-x}$ e quello della retta di equazione $y = 1$ si ottiene il grafico in fig. 7, da cui si deduce che l'equazione ha due soluzioni, $\alpha \in (1, 2)$ e $\beta \in (4, 5)$.

8 L'equazione data equivale a $\frac{x^3}{x^2 - 1} = k$ (infatti $x = \pm 1$ non possono essere soluzioni dell'equazione).

Studiando la funzione $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$, si deduce che l'equazione ammette tre soluzioni per $k \leq -\frac{3\sqrt{3}}{2} \vee k \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ e una soluzione per $-\frac{3\sqrt{3}}{2} < k < \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (più precisamente, per $k = 0$ ci sarebbero tre soluzioni coincidenti).

9 Dal grafico della funzione tracciato in fig. 8 si deduce che l'equazione non ha soluzioni per $k < -\frac{3}{8}\sqrt[3]{2}$.

10 L'equazione $ke^{x^2} = 2x$ equivale a $k = 2xe^{-x^2}$. Discutere l'equazione equivale a studiare il numero dei punti d'intersezione tra l'arco del grafico di $y = 2xe^{-x^2}$ definito dalla condizione $0 \leq x \leq 1$ e la retta di equazione $y = k$. Dallo studio del grafico di $y = 2xe^{-x^2}$ si ricava il grafico in fig. 9, da cui deduciamo che l'equazione ammette: una soluzione per $0 \leq k < 2e^{-1}$ e due soluzioni per $2e^{-1} \leq k \leq \sqrt{2}e^{-1}$.

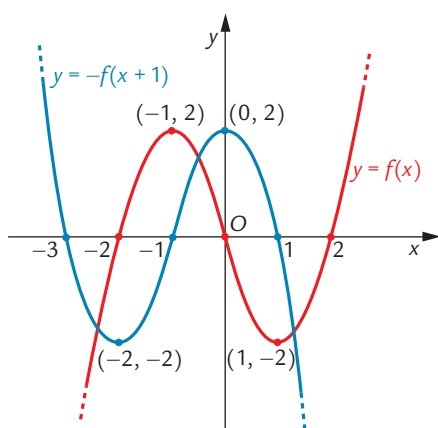


Figura 1

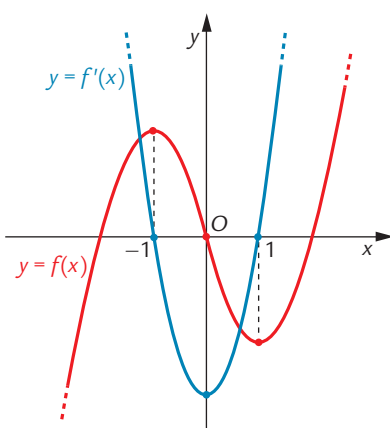


Figura 2

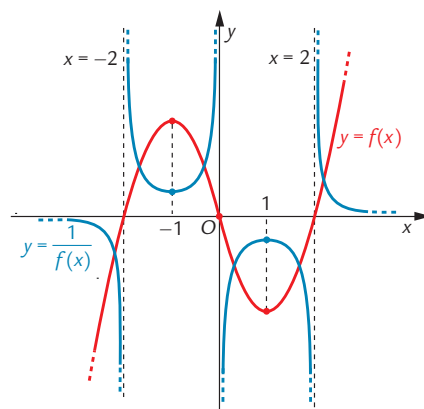


Figura 3

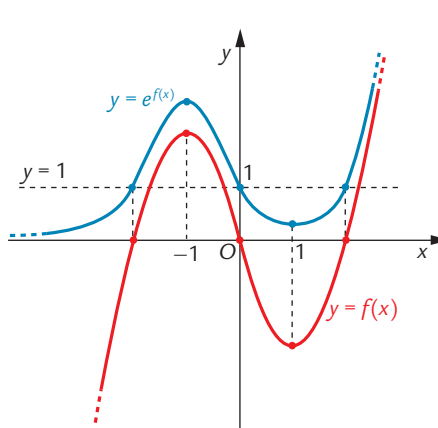


Figura 4

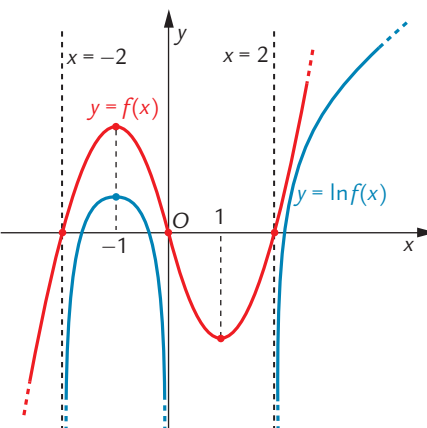


Figura 5

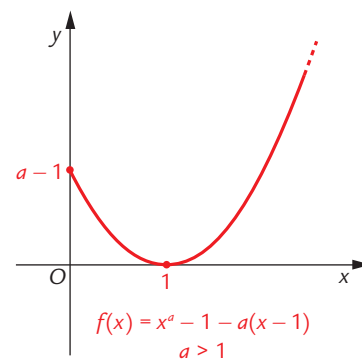


Figura 6

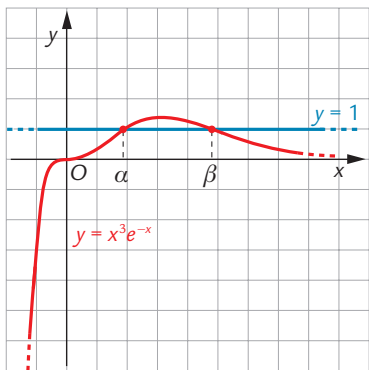


Figura 7

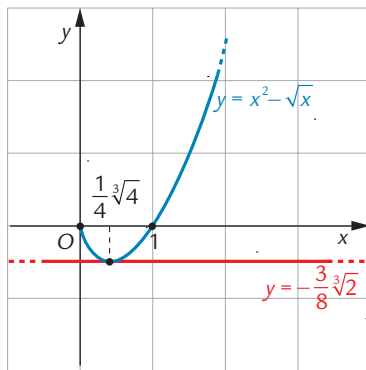


Figura 8

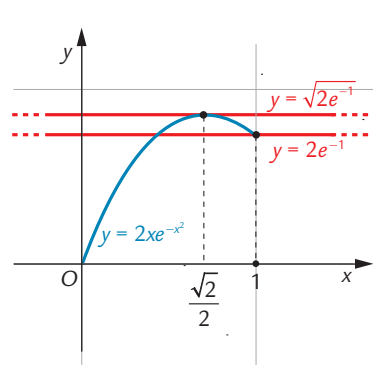


Figura 9