

# Approssimazione locale di una funzione mediante la formula di Taylor

## ■ La formula di Taylor

In questa scheda approfondiamo il problema dell'*approssimazione locale* di una funzione. Sappiamo che, data una funzione  $f$  derivabile in  $x_0$ , il grafico della funzione in un intorno di  $x_0$  può essere approssimato da quello della *retta tangente* nel punto  $x_0$ . Il problema che ci poniamo ora è quello di cercare funzioni che approssimino la funzione  $f$  in prossimità di  $x_0$  con una precisione migliore rispetto alla retta tangente.

L'idea è quella di «sostituire» la retta tangente con un polinomio di grado diciamo  $n$ , che abbia tutte le derivate fino all'ordine  $n$  uguali a quelle di  $f$  nel punto  $x = x_0$ .

Si dimostra che un tale polinomio esiste sempre ed è unico, a patto che la funzione  $f$  che si vuole approssimare sia derivabile  $n$  volte in  $x_0$ . Precisamente vale il seguente teorema:

### Polinomio di Taylor

### TEOREMA 1

Data una funzione  $f$ , derivabile  $n$  volte in  $x = x_0$ , esiste uno e un solo polinomio  $T_n(x)$  di grado minore o uguale a  $n$ , tale che:

$$T_n(x_0) = f(x_0), T'_n(x_0) = f'(x_0), \dots, T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Questo polinomio, detto di **Taylor di ordine  $n$** , è espresso dalla formula:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Un caso particolarmente importante è quello in cui  $x_0 = 0$ . In tal caso il polinomio di Taylor viene detto **polinomio di Maclaurin** della funzione  $f$  e la sua espressione è semplicemente:

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

### ESEMPIO Polinomi di Maclaurin di funzioni notevoli

Determiniamo il polinomio di Maclaurin per le funzioni

**a.**  $f(x) = e^x$     **b.**  $f(x) = \sin x$

**a.** Essendo  $f^{(n)}(x) = e^x$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 1$ , si ha  $f^{(n)}(0) = 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , quindi il polinomio di Maclaurin di  $f(x) = e^x$  è dato da:

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

**b.** Osserviamo che:

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x$$

poi il ciclo si ripete:

$$f^{(4)}(x) = \sin x, \quad f^{(5)}(x) = \cos x, \quad f^{(6)}(x) = -\sin x, \quad f^{(7)}(x) = -\cos x, \dots$$

In generale se ne deduce che:

$$f^{(2n)}(0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

Quindi il polinomio di Maclaurin di  $f(x) = \sin x$  è dato da:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \\ &= 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \\ &+ \frac{0}{6!}x^6 + \frac{-1}{7!}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Procedendo come negli ultimi due esempi si possono ricavare i polinomi di Maclaurin delle funzioni notevoli riportate in tabella.

| Funzione        | Polinomio di Maclaurin                                                                                   |
|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $f(x) = e^x$    | $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$                                                        |
| $f(x) = \sin x$ | $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$                          |
| $f(x) = \cos x$ | $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$             |
| $\ln(1+x)$      | $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$                   |
| $(1+x)^\alpha$  | $1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$ |

## La formula di Taylor con resto secondo Peano e relative applicazioni

Definito il polinomio di Taylor, un problema fondamentale che si pone è quello di valutare l'errore che si commette quando si sostituisce  $f(x)$  con  $T_n(x)$ ; il problema è cioè quello di valutare la quantità:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

detta **resto  $n$ -esimo (o errore di approssimazione)**. Un primo importante risultato sul resto  $R_n(x)$  è espresso dal seguente teorema.

### Resto secondo Peano

### TEOREMA 2

Sia  $f$  derivabile  $n$  volte in  $x_0$  e  $T_n(x)$  il polinomio di Taylor di ordine  $n$  della funzione  $f$  con centro in  $x_0$ . Posto  $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ , il resto  $R_n(x)$  è un infinitesimo di ordine superiore a  $(x - x_0)^n$  per  $x \rightarrow x_0$ , ossia:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \quad [1]$$

Per esprimere sinteticamente la [1] si utilizza solitamente la scrittura:

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n) \text{ per } x \rightarrow x_0 \quad [2]$$

che si legge « $R_n(x)$  è *o-piccolo* di  $(x - x_0)^n$  per  $x \rightarrow x_0$ ».

Tenendo conto che  $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$  e utilizzando la [2], possiamo scrivere la cosiddetta **formula di Taylor di  $f$  (centrata in  $x_0$  e di ordine  $n$ ) con il resto secondo Peano**:

$$f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n) \text{ per } x \rightarrow x_0 \quad [3]$$

Questa formula, che intuitivamente costituisce una «radiografia» del comportamento della funzione  $f$  in prossimità di  $x_0$ , ha importanti conseguenze. Ci limitiamo a gettare uno sguardo sulla sua applicazione nella risoluzione delle forme di indecisione. Nel calcolo di un limite  $x \rightarrow x_0$  è possibile sostituire infatti alla funzione il suo sviluppo di Taylor centrato in  $x_0$  di un ordine conveniente. Ci limiteremo a considerare limiti per  $x \rightarrow 0$  e quindi a utilizzare i polinomi di Maclaurin delle funzioni notevoli in tabella.

### Attenzione!

Per applicare la formula di Maclaurin nel calcolo dei limiti, è utile tenere presente le seguenti considerazioni:

1. In generale la scrittura  $o(x^n)$  indica una funzione che, divisa per  $x^n$ , tende a 0 per  $x \rightarrow x_0$ . Per esempio  $o(x^3)$  indica una funzione che divisa per  $x^3$  tende a 0 per  $x \rightarrow 0$ . Dunque risulta  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$  per definizione del simbolo  $o$ -piccolo.
2. In generale potremo dire che  $\frac{o(x^n)}{x^m} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$  se  $m \leq n$ , mentre se  $m > n$  non potremo stabilire a cosa tende il rapporto  $\frac{o(x^n)}{x^m}$  per  $x \rightarrow 0$ . Per esempio, possiamo dire che  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^2} = 0$  poiché possiamo scrivere  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} \cdot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \cdot 0 = 0$

Non possiamo stabilire invece a cosa tende  $\frac{o(x^3)}{x^4}$  per  $x \rightarrow 0$ ; infatti, scrivendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{o(x^3)}{x^3}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow \infty} \text{ siamo condotti alla forma indeterminata } 0 \cdot \infty.$$

### ESEMPIO Calcolo di un limite con l'utilizzo della formula di Maclaurin

Calcoliamo:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ .

Utilizziamo la formula di Maclaurin della funzione seno del terzo ordine:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{3!} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$  per definizione di  $o$ -piccolo.

### Attenzione!

Se avessimo considerato il polinomio di Maclaurin arrestato al primo ordine, cioè  $\sin x = x + o(x)$ , avremmo ottenuto  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^3}$ . A questo punto però sappiamo solo (per definizione di  $o$ -piccolo) che il numeratore tende a 0 se diviso per  $x$ ; nulla possiamo dedurre del suo comportamento quando viene diviso per  $x^3$  e quindi non possiamo concludere. Lo sviluppo del seno al primo ordine non è quindi sufficiente per il calcolo del limite.