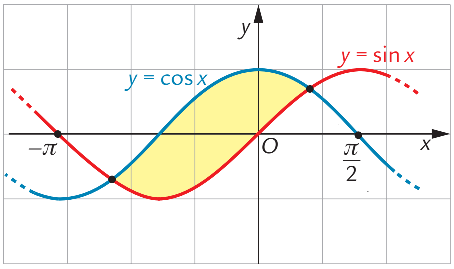
Unità 9 - Applicazioni degli integrali, integrali generalizzati e funzione integrale

1 Determina l'area della regione colorata in figura.



2 Determina l'area della regione finita di piano limitata dall'asse x e dalle due curve di equazioni $x = \frac{1}{2}y^2$ e $y = \sqrt{6 - x}$.

3 La base di un solido è costituita da un cerchio di diametro AB e raggio 1. Le sezioni del solido perpendicolari ad AB sono quadrati. Calcola il volume del solido.

4 Considera la parabola di equazione $y = 2 - 2x^2$ e il segmento parabolico che essa individua con l'asse x. Determina il volume del solido generato da una rotazione completa del segmento parabolico:

a. intorno all'asse x;

b. intorno all'asse y.

5 Calcola il valore dei seguenti integrali, se convergenti:

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx$ **b.** $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx$

6 Determina l'area della regione finita di piano limitata dai grafici delle funzioni:

$y = \frac{1}{2}x^3, \quad xy = 8, \quad y = x^2 - \frac{7}{2}x$

7 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} e^{1-t^2}\, dt$ nel suo punto di ascissa 1.

8 Calcola: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} \ln(1 + 2t^2)\, dt}{x^6}$

9 Considera la parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$ e il segmento parabolico che essa individua con l'asse x. Tra le parabole del fascio di equazione $y = -kx^2 + 3kx$, determina quelle che dividono tale segmento parabolico in due parti aventi la stessa area.

10 **Problemi nella storia.** Evangelista Torricelli (1608-1647), allievo di Galileo, studiò un particolare tipo di solido, detto *tromba di Torricelli*, ottenuto dalla rotazione completa intorno all'asse x della regione di piano del primo quadrante limitata dall'iperbole di equazione $y = \frac{1}{x}$, dalla retta di equazione $x = 1$ e dall'asse x stesso. La particolarità di questo solido è che esso ha volume *finito*, nonostante sia generato da una superficie *illimitata* e di area *infinita*. Verifica queste caratteristiche.

Le soluzioni sono alla pagina seguente

Soluzioni

1 L'area è data da $\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx$, che è uguale a $2\sqrt{2}$.

2 La parabola di equazione $x = \frac{1}{2}y^2$ è l'unione dei grafici delle due funzioni $y = \pm\sqrt{2x}$. Osserva che la regione di piano cui si chiede l'area è limitata dall'asse x e dai grafici di $y = \sqrt{2x}$ e $y = \sqrt{6 - x}$. A questo punto si può impostare il calcolo come di consueto e si trova che l'area vale 8.

3 Riferiamo la base del solido a un piano cartesiano rispetto al quale il contorno della base è la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e il diametro AB appartiene all'asse x. La sezione del solido con un piano perpendicolare ad AB, passante per $(x, 0)$ ha area $S(x) = 4(1 - x^2)$. Il volume del solido è dato dall'integrale $\int_{-1}^{1} S(x)\, dx$. Si trova così che il volume del solido è $\frac{16}{3}$.

4 **a.** $\frac{64\pi}{15}$; **b.** π.

5 **a.** Diverge; **b.** 1

6 La regione richiesta è quella colorata in fig. 1. La sua area è data da $\int_0^2 \frac{1}{2}x^3\, dx + \int_2^4 \frac{8}{x}\, dx + \int_4^0 \left(x^2 - \frac{7}{2}x\right) dx$, che si verifica essere uguale a $8 \ln 2 + \frac{26}{3}$.

7 Osserva che $f(1) = \int_1^1 e^{1-t^2}\, dt = 0$ e che $f'(x) = 2xe^{1-x^4}$, quindi $f'(1) = 2$; se ne deduce che l'equazione della retta tangente è $y = 2x - 2$.

8 Applicando il teorema di de l'Hôpital, si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} \ln(1 + 2t^2)dt}{x^6} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \ln(1 + 2x^4)}{6x^5} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 2x^4)}{3x^4} = \frac{2}{3}$$

9 Si osserva anzitutto che, affinché la relazione richiesta possa essere verificata, deve essere $k > 0$; una parabola del fascio, con $k > 0$, suddivide il segmento parabolico in due parti equivalenti se e solo se:

$$k \int_0^3 (3x - x^2)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^4 (4x - x^2)\, dx$$

da cui $k = \frac{32}{27}$. La parabola del fascio cercata è quella di equazione $y = -\frac{32}{27}x^2 + \frac{32}{9}x$.

10 Il volume del solido è dato dall'integrale improprio $\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$, che si verifica essere uguale a π. La superficie che genera il solido è evidentemente illimitata e ha area infinita poiché si verifica facilmente che l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ diverge.

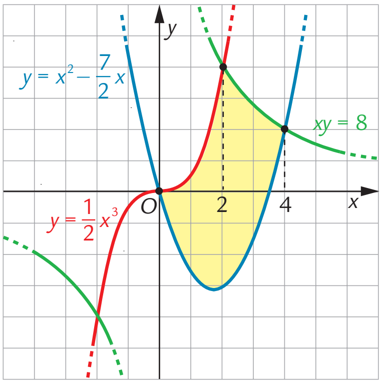


Figura 1