# Lunghezza di un arco di curva e area di una superficie di rotazione

## 1. La lunghezza di un arco di curva

Consideriamo la curva che rappresenta il grafico della funzione $y = f(x)$ e fissiamo la nostra attenzione sul tratto di curva per cui $a \leq x \leq b$. Vogliamo definire il concetto di lunghezza di un arco di curva e calcolarla.

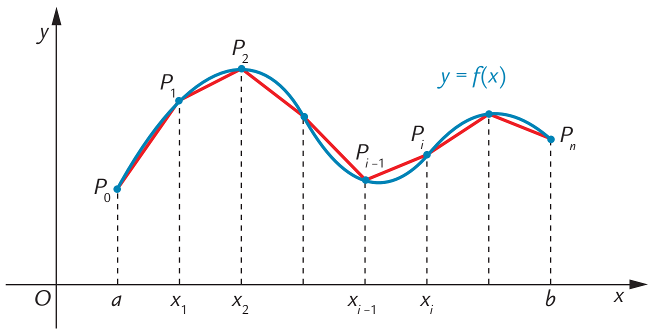



**Figura 1**

Consideriamo anzitutto i punti $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$ che suddividono $[a, b]$ in $n$ intervalli ciascuno di ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Questi punti individuano sulla curva i punti $P_0, P_1, P_2, ..., P_n$ di coordinate $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), ..., (x_n, f(x_n))$. Congiungendo $P_0$ con $P_1$, $P_1$ con $P_2$, ..., $P_{n-1}$ con $P_n$ si ottiene una *poligonale,* la cui lunghezza approssima quella dell'arco $\overset{\frown}{P_0P_n}$ di curva (**fig. 1**).

Definiamo **lunghezza** $L$ dell'arco $\overset{\frown}{P_0P_n}$ la lunghezza della poligonale quando $n \to +\infty$, ossia poniamo:

$$L = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \qquad [1]$$

Questa formula è però poco maneggevole ai fini dei calcoli. Possiamo ricavare una formula più pratica, supponendo che $f$ sia *derivabile* in $[a, b]$. Posto che ciò si verifichi, per il teorema di Lagrange è possibile determinare in ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ un punto $c_i$ per cui:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

quindi, sostituendo nella **[1]**, abbiamo:

$$L = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(c_i))^2 (x_i - x_{i-1})^2} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\, \Delta x$$

Nell'ultima espressione scritta riconosciamo il limite per $n \to +\infty$ di una *somma di Riemann* della funzione $y = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ nell'intervallo $[a, b]$. Possiamo allora concludere come segue.

**LUNGHEZZA DI UN ARCO DI CURVA**

Consideriamo la curva che rappresenta il grafico di una funzione $y = f(x)$, derivabile nell'intervallo $[a, b]$; la lunghezza $L$ dell'arco di curva per $a \leq x \leq b$ è data da:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \qquad [2]$$

**ESEMPIO** **Calcolo della lunghezza di un arco di curva**

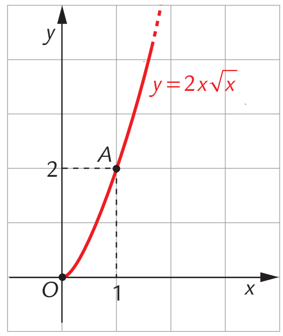
Determiniamo la lunghezza dell'arco della curva di equazione $y = 2x\sqrt{x}$ per $0 \le x \le 1$.

Osserviamo che l'arco di curva di cui dobbiamo calcolare la lunghezza ha per estremi i punti di coordinate $O(0,0)$ e $A(1,2)$.
Applichiamo la formula [2]; essendo:

$$f'(x) = 3\sqrt{x}$$

la lunghezza dell'arco $\widehat{OA}$ è:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+(3\sqrt{x})^2}\ dx = \int_0^1 \sqrt{1+9x}\ dx = \left[\frac{2}{27}(9x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{20}{27}\sqrt{10} - \frac{2}{27}$$




## 2. L'area di una superficie di rotazione

Consideriamo una funzione $y = f(x)$, continua in $[a, b]$, e la superficie ottenuta dalla rotazione della curva che rappresenta il suo grafico intorno all'asse $x$. Vogliamo definire e calcolare l'area di questa superficie (fig. 2).

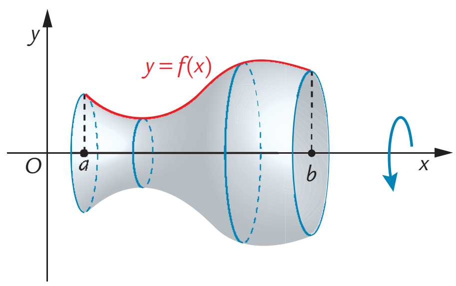



**Figura 2** Superficie di rotazione.

Come abbiamo fatto poc'anzi per definire la lunghezza di un arco di curva, consideriamo anzitutto i punti $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$ che suddividono $[a, b]$ in $n$ intervalli ciascuno di ampiezza $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ e i corrispondenti punti $P_0, P_1, P_2, ..., P_n$ sulla curva (vertici della poligonale approssimante). Nella rotazione intorno all'asse $x$ ogni segmento $\overline{P_{i-1}P_i}$ (fig. 3) genera un *tronco di cono* di apotema $P_{i-1}P_i$ avente come basi due cerchi di raggi $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$; l'area della superficie laterale di questo tronco di cono è perciò:

$$\pi\,\overline{P_{i-1}P_i}\ [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

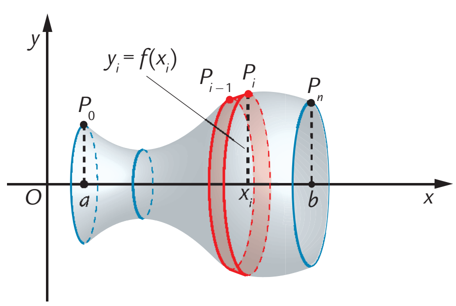



**Figura 3** Processo di approssimazione della superficie: se la lunghezza dell'arco è infinitesima, l'arco $\widehat{P_{i-1}P_i}$ può essere approssimato con un segmento, che nella rotazione intorno all'asse $x$ genera un tronco di cono.

Consideriamo la somma delle aree delle superfici laterali dei vari tronchi di cono e definiamo **area** $S$ della superficie che stiamo considerando il limite per $n \to +\infty$ di questa somma, cioè poniamo:

$$S = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi\, \overline{P_{i-1}P_i}\, [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \qquad [3]$$

Questa formula è poco maneggevole ai fini dei calcoli. Possiamo tuttavia ricavare una formula più comoda, supponendo che $f$ sia *derivabile* in $[a, b]$.
Ragionando come nella deduzione della formula per la lunghezza di un arco di curva, si ricava che:

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\,\Delta x$$

dove $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$; inoltre, poiché stiamo supponendo che $\Delta x \to 0$ (perché $n \to +\infty$) ed $f$ è continua, possiamo supporre anche:

$$f(x_{i-1}) \simeq f(c_i) \quad \text{e} \quad f(x_i) \simeq f(c_i)$$

Sulla base di queste considerazioni la [3] diventa:

$$S = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\, f(c_i)\, \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\, \Delta x \qquad [4]$$

Riconosciamo a questo punto nella [4] il limite di una somma di Riemann della funzione $y = 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Possiamo allora concludere come segue.

**AREA DI UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE**

Consideriamo la curva che rappresenta il grafico di una funzione $y = f(x)$, derivabile nell'intervallo $[a, b]$; l'area della superficie generata dalla rotazione intorno all'asse $x$ dell'arco della curva $f$ con $a \leq x \leq b$ è data da:

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \qquad [5]$$

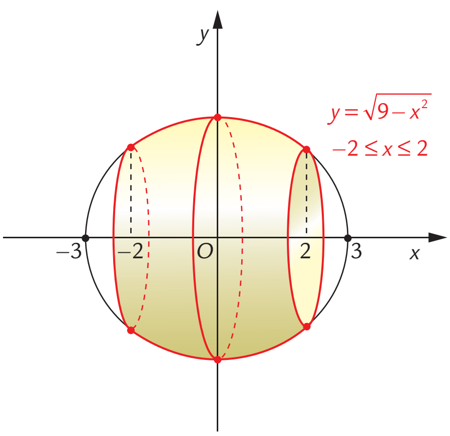
**Suggerimento**

Intuitivamente, la formula [5] può essere ricordata pensando la funzione integranda come il prodotto tra:
- la lunghezza della *circonferenza* di raggio $f(x)$;
- il termine $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ che serve a definire la lunghezza dell'arco compreso tra $a$ e $b$.

## ESEMPIO Calcolo dell'area di una superficie di rotazione

Consideriamo l'arco della semicirconferenza di equazione $y = \sqrt{9 - x^2}$ i cui punti hanno ascissa $x$, con $-2 \leq x \leq 2$. Determiniamo l'area della superficie generata da una rotazione completa di tale arco intorno all'asse $x$.

La superficie che si ottiene è una parte della superficie di una sfera di raggio 3.




Applichiamo la formula [5]. Essendo $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$ l'area della superficie è:

$$S = \int_{-2}^{2} 2\pi\sqrt{9 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2}}\, dx = 2\pi\int_{-2}^{2} \sqrt{9 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{9}{9 - x^2}}\, dx =$$

$$= 6\pi\int_{-2}^{2} 1\, dx = 6\pi \cdot 4 = 24\pi$$