

Integrazione di funzioni goniometriche e irrazionali

In questo approfondimento presentiamo alcune tecniche per integrare particolari classi di funzioni *goniometriche* e *irrazionali*.

1. Integrali di funzioni goniometriche

■ Integrali del tipo $\int \sin^n x \cos^m x dx$

Illustriamo mediante alcuni esempi le tecniche di integrazione degli integrali del tipo $\int \sin^n x \cos^m x dx$, essendo n ed m due interi positivi. Il procedimento di integrazione varia a seconda che n ed m siano pari o dispari.

ESEMPIO Caso in cui n è dispari

Calcoliamo $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \text{Integrale da calcolare}$$

$$= \int \sin x \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx =$$

$$= \int \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^2 x dx = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$= \int \sin x \cos^2 x dx - \int \sin x \cos^4 x dx = \text{I due integrali ottenuti possono ricondursi alla forma } \int f'(x)[f(x)]^a dx$$

$$= - \int (-\sin x) \cos^2 x dx + \int (-\sin x) \cos^4 x dx =$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

ESEMPIO Caso in cui m è dispari

Calcoliamo $\int \cos^3 x dx$.

Utilizziamo una tecnica simile a quella dell'esempio precedente.

$$\int \cos^3 x dx =$$

$$= \int \cos^2 x \cdot \cos x dx =$$

$$= \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$= \int \cos x dx - \int \cos x \sin^2 x dx = \text{Il primo integrale è immediato e il secondo è della forma } \int f'(x)[f(x)]^a dx$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

ESEMPIO Caso in cui n e m sono pariCalcoliamo $\int \sin^4 x \, dx$.

$$\int \sin^4 x \, dx =$$

$$= \int (\sin^2 x)^2 \, dx =$$

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx =$$

Dalle formule di bisezione segue:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \text{ e } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos^2 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \, dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \, dx =$$

Dalle formule di bisezione si deduce:

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$$

$$= \int \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos 4x}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \, dx =$$

Abbiamo una somma di integrali immediati

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

In generale:

- una tecnica simile a quella dei primi due esempi (riscrivere la funzione integranda in modo che compaia *un solo* fattore uguale a $\sin x$ o a $\cos x$) si applica per calcolare gli integrali del tipo $\int \sin^n x \cos^m x \, dx$ se n è dispari o m è dispari;
- una tecnica simile a quella indicata nel terzo esempio (utilizzo delle formule di bisezione $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ e, in certi casi, della formula $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$) si applica per calcolare gli integrali del tipo $\int \sin^n x \cos^m x \, dx$ quando sia n sia m sono pari.

Integrali che sono funzioni razionali di $\sin x$ e $\cos x$

Se la funzione integranda è una funzione razionale di $\sin x$ e $\cos x$, si può condurre l'integrale a quello di una funzione *razionale frazionaria* con la sostituzione:

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

e l'impiego delle formule parametriche:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Questo procedimento, pur avendo il pregio della generalità, porta spesso a calcoli piuttosto laboriosi ed è quindi consigliabile solo quando non sembra esservi nessun altro metodo per risolvere l'integrale.

ESEMPIO Integrazione di funzioni goniometriche tramite le formule parametricheCalcoliamo $\int \frac{1}{\sin x} \, dx$.Ponendo $t = \tan \frac{x}{2}$, ossia $x = 2 \arctan t$, si ha:

$$dx = \frac{2}{1+t^2} \, dt$$

quindi, ricordando che $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, abbiamo:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \underbrace{\frac{1}{2t}}_{1/\sin x} \underbrace{\frac{2}{1+t^2} dt}_{dx} = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$$

■ **Integrali del tipo** $\int \sin mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx,$
 $\int \cos mx \cos nx dx$

Questi integrali si calcolano tramite le *formule di Werner*, che consentono di trasformare la funzione integranda in una somma.

ESEMPIO Utilizzo delle formule di Werner

Calcoliamo: $\int \sin 3x \cos 4x dx$.

Ricordando che:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta)]$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \cos 4x dx &= \\ &= \int \frac{1}{2} [\sin (-x) + \sin (7x)] dx = \text{Formule di Werner} \\ &= \frac{1}{2} \int (-\sin x + \sin 7x) dx = \text{Ora abbiamo una somma di integrali immediati} \\ &= \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{14} \cos 7x + c \end{aligned}$$

2. Integrali di funzioni irrazionali

■ **Integrali dipendenti da** $\sqrt[n]{ax+b}$

Se la funzione integranda è una funzione *irrazionale* che contiene un solo radicale del tipo $\sqrt[n]{ax+b}$, il calcolo dell'integrale può essere condotto a quello di una funzione *razionale* mediante la sostituzione $\sqrt[n]{ax+b} = t$.

ESEMPIO Integrazione di funzioni contenenti un solo radicale del tipo $\sqrt[n]{ax+b}$

Calcoliamo $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx$.

Poniamo $\sqrt{x+4} = t$, da cui $x = t^2 - 4$. Ne segue:

$$dx = 2t dt$$

Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx &= \int \frac{t^2 - 4}{t} 2t dt = \int (2t^2 - 8) dt = \frac{2t^3}{3} - 8t + c = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(x+4)^3} - 8\sqrt{x+4} + c \end{aligned}$$

■ Integrali dipendenti da $\sqrt{a^2 - x^2}$

Se la funzione integranda è una funzione *irrazionale* contenente un solo radicale del tipo $\sqrt{a^2 - x^2}$, il calcolo dell'integrale può avvenire tramite la sostituzione:

$$x = a \sin t, \quad \text{con } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

La condizione su t garantisce l'invertibilità della funzione $x = a \sin t$

ESEMPIO Integrazione di funzioni contenenti un solo radicale del tipo $\sqrt{a^2 - x^2}$

Calcoliamo $\int \sqrt{4 - x^2} dx$.

In questo caso $a = 2$, quindi poniamo $x = 2 \sin t$, ossia $t = \arcsin \frac{x}{2}$.

Ne segue che:

$$dx = 2 \cos t dt$$

Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4 - x^2} dx &= \int \underbrace{\sqrt{4 - 4 \sin^2 t}}_{\sqrt{4 - x^2}} \cdot \underbrace{2 \cos t}_{dx} dt \\ &= \int 4 \cos^2 t dt = \int 4 \cos^2 t dt = \int 2(1 + \cos 2t) dt = \\ &= 2t + \sin 2t + c = \\ &= 2 \arcsin \frac{x}{2} + \sin \left(2 \arcsin \frac{x}{2} \right) + c = \text{Ricordando che } t = \arcsin \frac{x}{2} \\ &= 2 \arcsin \frac{x}{2} + 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + c = \text{Applicando la formula di duplicazione del seno:} \\ &= 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} x \sqrt{4 - x^2} + c \end{aligned}$$

$\sqrt{4 - 4 \sin^2 t} = 2\sqrt{1 - \sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2 \cos t$
 Formula di bisezione: $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$
 $\sin \left(2 \arcsin \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \arcsin \frac{x}{2} \cdot \cos \arcsin \frac{x}{2}$
 $\frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$

Osserva

È lecito scrivere $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ invece di $\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$ perché stiamo supponendo $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

■ Integrali dipendenti da $\sqrt{x^2 + a^2}$ o $\sqrt{x^2 - a^2}$

Se la funzione integranda è una funzione *irrazionale* che contiene *un solo* radicale, del tipo $\sqrt{x^2 + a^2}$ oppure $\sqrt{x^2 - a^2}$, il calcolo dell'integrale può essere condotto a quello di una funzione razionale mediante la sostituzione:

$$\sqrt{x^2 \pm a^2} = t - x$$

ESEMPIO Integrazione di funzioni contenenti un solo radicale del tipo $\sqrt{x^2 + a^2}$ o $\sqrt{x^2 - a^2}$

Calcoliamo $\int \sqrt{x^2 + 4} dx$.

Poniamo:

$$\sqrt{x^2 + 4} = t - x, \quad \text{cioè } t = \sqrt{x^2 + 4} + x$$

Ne segue:

$$\sqrt{x^2 + 4} = t - x \Rightarrow x^2 + 4 = (t - x)^2 \Rightarrow x^2 + 4 = t^2 - 2tx + x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 - 4}{2t}$$

e

$$dx = \frac{t^2 + 4}{2t^2} dt$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + 4} dx &= \\ &= \int \underbrace{\left(t - \frac{t^2 - 4}{2t}\right)}_{\sqrt{x^2 + 4} = t - x} \cdot \underbrace{\left(\frac{t^2 + 4}{2t^2}\right)}_{dx} dt = \\ &= \int \frac{(t^2 + 4)^2}{4t^3} dt = \text{L'integrale si può ricondurre a una somma di integrali immediati per scomposizione} \\ &= \int \left(\frac{t}{4} + \frac{2}{t} + \frac{4}{t^3}\right) dt = \\ &= 2 \ln |t| + \frac{1}{8} t^2 - \frac{2}{t^2} + c = \text{Ricorda ora che } t = \sqrt{x^2 + 4} + x \\ &= 2 \ln |\sqrt{x^2 + 4} + x| + \frac{1}{8} (\sqrt{x^2 + 4} + x)^2 - \frac{2}{(\sqrt{x^2 + 4} + x)^2} + c = \\ &= 2 \ln |\sqrt{x^2 + 4} + x| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 4} + c \quad \text{Svolgendo i calcoli} \end{aligned}$$

1. Integrali di funzioni goniometriche

Esercizi preliminari

Test

1 Per calcolare quale dei seguenti integrali è utile la sostituzione $\tan \frac{x}{2} = t$?

A $\int \frac{1}{\cos x} dx$

B $\int \cos^2 x dx$

C $\int \tan x dx$

D $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

2 Effettuando nell'integrale $\int \frac{1}{1+2\sin x} dx$ la sostituzione $\tan \frac{x}{2} = t$, a quale dei seguenti integrali si viene ricondotti?

A $\int \frac{2}{t^2+4t+1} dt$

B $\int \frac{1}{t^2+4t+1} dt$

C $\int \frac{t^2+1}{t^2+4t+1} dt$

D $\int \frac{2t^2+2}{t^2+4t+1} dt$

3 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola i seguenti integrali:

a. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$

b. $\int \cos^4 x dx$

a. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^4 x dx = \dots\dots\dots$

b. $\int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \dots\dots\dots$ [a. $\frac{1}{7} \cos^7 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + c$; b. $\frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8} x + c$]

Calcola i seguenti integrali.

4 $\int \cos^2 x dx$

[$\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x + c$]

9 $\int (1 + 2 \sin x)^2 dx$

[$-\sin 2x - 4 \cos x + 3x + c$]

5 $\int \sin^3 x dx$

[$-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c$]

10 $\int \sin 2x \cos^3 x dx$

[$-\frac{2}{5} \cos^5 x + c$]

6 $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

[$\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + c$]

11 $\int \sin^2 2x \cos x dx$

[$\frac{4}{3} \sin^3 x - \frac{4}{5} \sin^5 x + c$]

7 $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

[$-\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + c$]

12 $\int (\tan x + \tan^2 x) dx$

[$-\ln |\cos x| + \tan x - x + c$]

8 $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

[$\frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + c$]

13 $\int \tan^4 x dx$

[$-\tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + x + c$]

14 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola $\int \frac{1}{\cos x} dx$.

• Poni $\tan \frac{x}{2} = t$, ossia $x = 2 \arctan t$ e $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

• Verifica che con queste sostituzioni l'integrale si trasforma in $\int \frac{2}{1-t^2} dt$.

• Calcola quest'ultimo integrale, quindi ritorna alla variabile x ricordando la sostituzione operata.

[$\ln \left| \tan \frac{x}{2} + 1 \right| - \ln \left| \tan \frac{x}{2} - 1 \right| + c$]

Calcola i seguenti integrali con il metodo illustrato nell'esercizio guidato precedente.

$$15 \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad \left[\frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} + c \right]$$

$$16 \quad \int \frac{1}{1 + \sin x} dx \quad \left[-\frac{2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + c \right]$$

$$17 \quad \int \frac{1}{5 \cos x - 3} dx \quad \left[\frac{1}{4} \ln \left| 2 \tan \frac{x}{2} + 1 \right| - \frac{1}{4} \ln \left| 2 \tan \frac{x}{2} - 1 \right| + c \right]$$

$$18 \quad \int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx \quad \left[\ln \left| \tan \frac{x}{2} + 1 \right| + c \right]$$

Calcola i seguenti integrali, ricordando le formule di Werner.

$$19 \quad \int \sin 2x \cos 3x dx \quad \left[\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + c \right]$$

$$20 \quad \int \sin 2x \cos 4x dx \quad \left[\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{12} \cos 6x + c \right]$$

$$21 \quad \int \sin x \sin 3x dx \quad \left[\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x + c \right]$$

$$22 \quad \int \cos x \cos 2x dx \quad \left[\frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{2} \sin x + c \right]$$

2. Integrali di funzioni irrazionali

Esercizi preliminari

23 Per calcolare un integrale in cui compare una radice del tipo $\sqrt{9 - x^2}$, quale delle seguenti sostituzioni potrebbe essere utile?

- [A] $x = 9 \sin t$ [B] $\sqrt{9 - x^2} = t - x$ [C] $x = 3 \sin t$ [D] $\sqrt{9 - x^2} = t$

24 Per calcolare un integrale in cui compare una radice del tipo $\sqrt{9 + x^2}$, quale delle seguenti sostituzioni potrebbe essere utile?

- [A] $x = 9 \sin t$ [B] $\sqrt{9 + x^2} = t - x$ [C] $x = 3 \sin t$ [D] $\sqrt{9 + x^2} = t$

25 ESERCIZIO GUIDATO

Calcola i seguenti integrali:

a. $\int \sqrt{1 - x^2} dx$ b. $\int \sqrt{1 + x^2} dx$

a. Poni $x = \sin t$ e verifica che con questa sostituzione l'integrale si trasforma in $\int \cos^2 t dt$; risolvi quest'ultimo integrale, quindi ritorna alla variabile x .

b. Poni $\sqrt{1 + x^2} = t - x$ e verifica che con questa sostituzione l'integrale si trasforma in $\int \frac{(t^2 + 1)^2}{4t^3} dt$; risolvi quest'ultimo integrale, quindi ritorna alla variabile x .

$$\left[\text{a. } \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + c; \text{ b. } \frac{1}{2} \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}) + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 1} + c \right]$$

Calcola i seguenti integrali.

- 26** $\int \sqrt{16 - x^2} \, dx$ $\left[8 \arcsin \frac{x}{4} + \frac{1}{2} x \sqrt{16 - x^2} + c \right]$
- 27** $\int \sqrt{25 - x^2} \, dx$ $\left[\frac{25}{2} \arcsin \frac{x}{5} + \frac{x}{2} \sqrt{25 - x^2} + c \right]$
- 28** $\int \sqrt{x^2 - 16} \, dx$ $\left[\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 16} - 8 \ln (\sqrt{x^2 - 16} + x) + c \right]$
- 29** $\int \sqrt{x^2 - 25} \, dx$ $\left[\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 25} - \frac{25}{2} \ln (\sqrt{x^2 - 25} + x) + c \right]$
- 30** $\int \sqrt{x^2 + 16} \, dx$ $\left[8 \ln (x + \sqrt{x^2 + 16}) + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 16} + c \right]$
- 31** $\int \sqrt{x^2 + 9} \, dx$ $\left[\frac{9}{2} \ln (x + \sqrt{x^2 + 9}) + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 9} + c \right]$
- 32** $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}} \, dx$ $\left[\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{9x} + c \right]$
- 33** $\int x^2 \sqrt{1 - x^2} \, dx$ $\left[\frac{1}{8} \arcsin x - \frac{1}{4} x \sqrt{(1 - x^2)^3} + \frac{1}{8} x \sqrt{1 - x^2} + c \right]$
- 34** $\int \frac{1}{x \sqrt{4 - x^2}} \, dx$ $\left[\frac{1}{2} (\ln |\sqrt{4 - x^2} - 2| - \ln |x|) + c \right]$
- 35** $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx$ $\left[\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \ln (\sqrt{x^2 + 1} + x) + c \right]$