Dimostrazione del teorema 2.4

Disequazioni della forma $|A(x)| < B(x)$ e $|A(x)| > B(x)$ — **TEOREMA 2.4**

Siano $A(x)$ e $B(x)$ due qualsiasi espressioni nella variabile reale x. Allora risulta:

$$|A(x)| < B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) < B(x) \\ A(x) > -B(x) \end{cases} \qquad [1]$$

$$|A(x)| > B(x) \Leftrightarrow A(x) < -B(x) \vee A(x) > B(x) \qquad [2]$$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo la [1]. In base alla definizione di valore assoluto, sappiamo che:

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

Dunque dobbiamo provare che:

$$\underbrace{\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}}_{\text{Sistema 1}} \vee \underbrace{\begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) > -g(x) \end{cases}}_{\text{Sistema 2}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}}_{\text{Sistema 3}}$$

Detti S_1, S_2, S_3 gli insiemi delle soluzioni rispettivamente dei tre sistemi 1, 2 e 3, si tratta di provare che $S_1 \cup S_2 = S_3$.

1. Proviamo che se $x \in S_1 \cup S_2$, allora $x \in S_3$, ovvero che $S_1 \cup S_2 \subseteq S_3$.

Sia $x \in S_1 \cup S_2$; sono possibili due casi: o $x \in S_1$ o $x \in S_2$ (essendo S_1 ed S_2 disgiunti).

- Se $x \in S_1$, allora x è tale che $f(x) < g(x)$, quindi per provare che $x \in S_3$ basta provare che x soddisfa la disequazione $f(x) > -g(x)$. In effetti x soddisfa certamente quest'ultima disequazione, rendendo il primo membro *positivo o nullo* (perché x deve soddisfare la prima disequazione del sistema 1) e il secondo membro *negativo* perché x è tale che $g(x) > f(x) \geq 0$ (infatti x deve soddisfare la seconda disequazione del sistema 1, che equivale a $g(x) > f(x)$, e la prima, per cui $f(x) \geq 0$).
- Se $x \in S_2$, allora x è tale che $f(x) > -g(x)$, quindi per provare che $x \in S_3$ basta provare che x soddisfa la disequazione $f(x) < g(x)$. In effetti x soddisfa certamente quest'ultima disequazione, rendendo il primo membro *negativo* (perché x deve soddisfare la prima disequazione del sistema 2) e il secondo membro *positivo* perché x è tale che $g(x) > -f(x) > 0$ (infatti x deve soddisfare la seconda disequazione del sistema 2, che equivale a $g(x) > -f(x)$, e la prima, che equivale a $-f(x) > 0$).

2. Proviamo che se $x \in S_3$, allora $x \in S_1 \cup S_2$, ovvero che $S_3 \subseteq S_1 \cup S_2$.

- Sia $x \in S_3$; per provare la tesi dobbiamo provare che allora $x \in S_1$ o $x \in S_2$.
- Osserviamo anzitutto che, se $x \in S_3$, allora x soddisfa entrambe le disequazioni $f(x) < g(x)$ e $f(x) > -g(x)$: dunque, se x è tale che $f(x) \geq 0$, allora $x \in S_1$ poiché, per quanto appena osservato, è anche $f(x) < g(x)$; in caso contrario sarà $f(x) < 0$ e allora $x \in S_2$ poiché sappiamo che è anche $f(x) > -g(x)$.

3. Avendo provato che $S_1 \cup S_2 \subseteq S_3$ ed $S_3 \subseteq S_1 \cup S_2$, ne segue che $S_1 \cup S_2 = S_3$.

Con ragionamenti analoghi a quelli svolti per la dimostrazione della [1] si potrebbe dimostrare anche la [2].

Ricorda

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Rifletti

Il teorema ci dice che le soluzioni della disequazione sono le *unioni* delle soluzioni delle due disequazioni:

$f(x) < -g(x)$ e $f(x) > g(x)$.

Dimostrazione del teorema 2.4

I risultati espressi nel **teorema 1.4** si estendono naturalmente a disequazioni in cui il simbolo di disuguaglianza è debole:

$$|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases} \qquad [3]$$

$$|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq -g(x) \vee f(x) \geq g(x) \qquad [4]$$

Attenzione!

La validità delle due equivalenze:

$$|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases} \qquad [5]$$

$$|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq -g(x) \vee f(x) \geq g(x) \qquad [6]$$

potrebbe indurre a pensare che:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \vee f(x) = -g(x) \quad \text{Errata!} \qquad [7]$$

Tuttavia quest'ultima equivalenza è *errata*, come è facile rendersi conto considerando per esempio l'equazione $|x+1| = 2x$: si verifica che essa ha come unica soluzione $x = 1$, mentre se fosse vera la **[7]** l'equazione dovrebbe equivalere a $x + 1 = 2x \vee x + 1 = -2x$ e avere quindi come soluzioni sia $x = 1$ (soluzione dell'equazione $x + 1 = 2x$), sia $x = -\frac{1}{3}$ (soluzione dell'equazione $x + 1 = -2x$).

A conferma di ciò osserviamo che da **[5]** e **[6]** **non** segue la **[7]**, bensì l'equivalenza corretta:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Risulta infatti:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)| \geq g(x) \\ |f(x)| \leq g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq -g(x) \vee f(x) \geq g(x) \\ -g(x) \leq f(x) \leq g(x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq -g(x) \\ -g(x) \leq f(x) \leq g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ -g(x) \leq f(x) \leq g(x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq -g(x) \\ f(x) \geq -g(x) \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ f(x) \geq -g(x) \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -g(x) \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -f(x) = g(x) \\ f(x) \leq -f(x) \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq -f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -f(x) = g(x) \\ f(x) \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$