

Applicazioni economiche del concetto di derivata

In economia si utilizza l'aggettivo **marginale** per indicare la *derivata* delle funzioni costo, ricavo e profitto (nell'ipotesi che queste ultime siano derivabili): le funzioni **costo marginale**, **ricavo marginale**, **profitto marginale** indicano rispettivamente la derivata delle corrispondenti funzioni costo, ricavo e profitto rispetto alla variabile indipendente (che è solitamente la quantità prodotta o venduta).

Sempre in ambito economico, il *valore della derivata* di una funzione in un punto x_0 (per esempio il valore del profitto marginale in corrispondenza della quantità q_0) viene spesso utilizzato come *approssimazione* della *variazione* della funzione in corrispondenza di un incremento di *una unità* della variabile indipendente, a partire dal valore x_0 (per esempio come approssimazione di quanto varia il profitto per un incremento di una unità della quantità prodotta, cioè del passaggio della quantità prodotta da q_0 a $q_0 + 1$). Questa approssimazione si fonda sul fatto che il grafico di una funzione derivabile in un punto x_0 può essere approssimato localmente dalla retta tangente al grafico della funzione in x_0 (fig. 1).

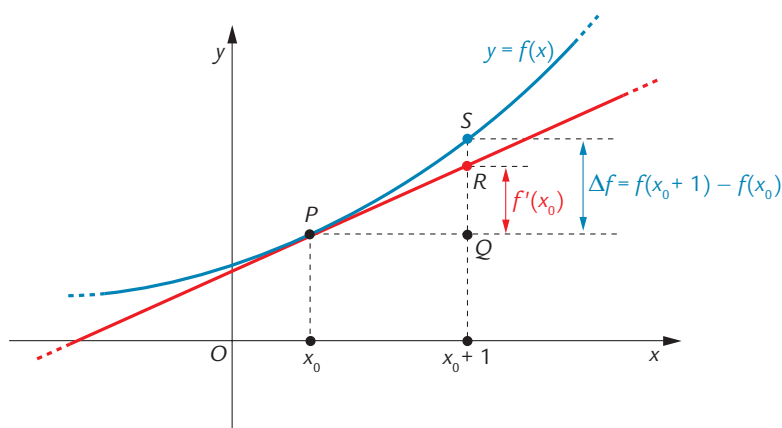


Figura 1 La variazione Δf dei valori assunti dalla funzione $y = f(x)$ quando l'ascissa x passa dal valore x_0 al valore $x_0 + 1$ (rappresentata in figura dal segmento QS) può essere approssimata dalla variazione tra i corrispondenti valori sulla retta tangente al grafico della funzione in x_0 (rappresentata in figura dal segmento QR). La variazione sulla retta tangente è uguale al coefficiente angolare della retta stessa, cioè a $f'(x_0)$. Ne segue che $f(x_0 + 1) - f(x_0) \simeq f'(x_0)$.

ESEMPIO Profitto marginale e suo significato in ambito economico

Il profitto (in euro) derivante dalla produzione e vendita della quantità q di un dato bene è espresso dalla funzione:

$$U(q) = 0,0004q^3 + 8q$$

- Determiniamo la funzione profitto marginale.
 - Determiniamo il profitto marginale in corrispondenza della produzione di una quantità $q = 100$. Confrontiamo tale valore con la variazione del profitto conseguente a un incremento della quantità q venduta da 100 a 101.
- a. La funzione profitto marginale, che indichiamo con $U_{ma}(q)$, è semplicemente la derivata della funzione profitto, quindi:

$$U_{ma}(q) = U'(q) = 0,0004 \cdot 3q^2 + 8 = 0,0012q^2 + 8$$

- b. Il profitto marginale in corrispondenza della quantità $q = 100$ è:

$$U_{ma}(100) = U'(100) = 0,0012 \cdot 100^2 + 8 = 20$$

Pertanto, in base a quanto osservato prima dell'esempio, possiamo dire che quando la quantità q venduta passa da 100 a 101 il profitto aumenta *approssimativamente* di 20 euro. Possiamo verificare che l'approssimazione è effettivamente buona; infatti la variazione reale del profitto è uguale a:

$$\begin{aligned} U(101) - U(100) &= \\ &= (0,0004 \cdot 101^3 + 8 \cdot 101) - (0,0004 \cdot 100^3 + 8 \cdot 100) = 20,1204 \end{aligned}$$

L'errore commesso è quindi soltanto di circa 12 centesimi.

Nell'esempio precedente, la variazione del profitto in corrispondenza di un aumento unitario della quantità venduta (a partire dal valore $q = 100$) è risultata molto ben approssimata dal valore della funzione profitto marginale quando $q = 100$; tuttavia è bene osservare che non sempre ciò accade: l'approssimazione è tanto migliore quanto più la funzione di cui si vuole approssimare la variazione nell'intervallo $[x_0, x_0 + 1]$ è bene approssimata in tale intervallo dalla retta tangente al grafico della funzione in x_0 . Esistono casi in cui l'approssimazione lineare su tale intervallo non è buona e di conseguenza il valore approssimato ottenuto valutando la derivata in x_0 è significativamente diverso dalla reale variazione della funzione nell'intervallo $[x_0, x_0 + 1]$.