

Studio dei punti di estremo relativo e di flesso con il metodo delle derivare successive

■ Analisi dei punti stazionari in base alla derivata seconda

A volte lo studio del segno della derivata prima può risultare laborioso; in questi casi per l'analisi della natura di un punto stazionario può essere utile il criterio fornito dal seguente teorema.

Test dei punti stazionari mediante l'utilizzo della derivata seconda	TEOREMA 1
Sia x_0 un punto stazionario di una funzione f e supponiamo che f sia derivabile due volte in x_0: a. se $f''(x_0) > 0$, allora il punto x_0 è di minimo relativo per f; b. se $f''(x_0) < 0$, allora il punto x_0 è di massimo relativo per f.	Attenzione! Il criterio espresso dal teorema 1 non permette di concludere nulla se $f''(x_0) = 0$, come puoi renderti conto esaminando le funzioni $f(x) = x^4$, $f(x) = -x^4$ e $f(x) = x^5$: in tutti e tre i casi risulta $f''(0) = 0$, ma la prima funzione presenta in $x = 0$ un minimo, la seconda un massimo e la terza un flesso.
DIMOSTRAZIONE Dimostriamo, per esempio, l'implicazione a. Analogamente si potrebbe dimostrare l'implicazione b. - Osserviamo che: $f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \text{Definizione di derivata in un punto}$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} \quad f'(x_0) = 0 \text{ poiché } x_0 \text{ è stazionario}$ - Essendo per ipotesi $f''(x_0) > 0$, per il teorema di permanenza del segno segue che esiste un intorno I di x_0 tale che $\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$. Se ne deduce che $f'(x) < 0$ nei punti di I a sinistra di x_0 (cioè per $x < x_0$) e $f'(x) > 0$ nei punti a destra di x_0 (cioè per $x > x_0$). Quindi x_0 è un punto di minimo relativo in base al teorema 6.7.	

ESEMPIO Studio dei punti stazionari con l'utilizzo della derivata seconda

Data la funzione $f(x) = -x^3 + 6x^2$, determiniamo i suoi punti di estremo relativo.

Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = -3x^2 + 12x$$

e individuiamo i punti in cui la derivata si annulla:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow 3x(-x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 4$$

Per stabilire la natura dei due punti stazionari trovati, utilizziamo il metodo della derivata seconda.

Essendo

$$f''(x) = -6x + 12$$

risulta:

$$f''(0) = 12 > 0 \quad \text{quindi } x = 0 \text{ è un punto di minimo relativo}$$

$$f''(4) = -12 < 0 \quad \text{quindi } x = 4 \text{ è un punto di massimo relativo}$$

■ Analisi dei punti in cui si annulla la derivata seconda tramite la derivata terza

Un metodo alternativo allo studio del segno della derivata seconda, per stabilire la natura di un punto in cui essa si annulla, è espresso dal seguente teorema, che ci limitiamo a enunciare.

Test della derivata terza per i flessi

TEOREMA 2

Sia f una funzione definita in un intervallo I e sia x_0 un punto interno a I , in cui f è derivabile tre volte.

- a. Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di flesso ascendente.
- b. Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di flesso discendente.

Il teorema non prende in considerazione l'eventualità $f'''(x_0) = 0$, poiché in questo caso la natura del punto varia da funzione a funzione. Per esempio, si può facilmente verificare che le funzioni $y = x^4$ e $y = x^5$ hanno entrambe derivate seconda e terza nulle per $x = 0$, tuttavia l'origine non è un punto di flesso per la prima funzione, mentre lo è per la seconda.