

Il metodo di Newton e l'approssimazione delle radici di un'equazione

Approfondiamo ulteriormente lo studio delle equazioni, ritornando in questa scheda sul problema dell'approssimazione numerica delle radici di un'equazione non risolvibile algebricamente. Abbiamo già imparato un metodo, quello di *bisezione*.

Vogliamo ora presentare un metodo alternativo, il cosiddetto **metodo di Newton**, che risulta più «efficiente» di quello di bisezione nel senso che converge alla soluzione molto più rapidamente.

■ In che cosa consiste il metodo di Newton?

Consideriamo l'equazione $f(x) = 0$ e supponiamo di aver accertato che tale equazione ammette nell'intervallo $[a, b]$ un'unica soluzione, diciamola α .

Spieghiamo intuitivamente l'idea che sta alla base del metodo di Newton con riferimento alla fig. 1.

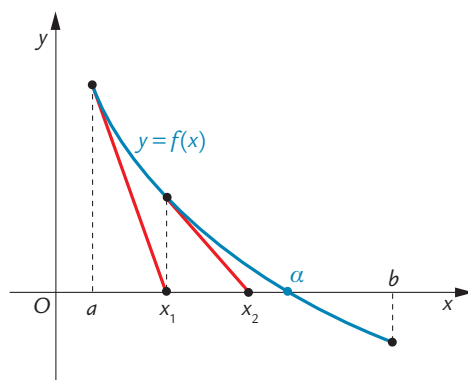


Figura 1

L'idea è di costruire una successione $x_0, x_1, \dots, x_n$ che sia convergente ad α .

Partiamo da $x_0 = a$ e tracciamo la retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ in x_0 ; sappiamo che tale retta ha equazione:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad [1]$$

Definiamo il secondo termine della successione che vogliamo costruire, x_1 , come l'ascissa del punto di intersezione della retta tangente con l'asse x ; nel punto x_1 sarà:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \quad [2]$$

Risolvendo la [2] rispetto a x_1 (nell'ipotesi $f'(x_0) \neq 0$), otteniamo:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Ripetendo il procedimento con x_1 al posto di $x_0 = a$, conduciamo la retta tangente al grafico della funzione f nel punto di ascissa x_1 e indichiamo con x_2 l'ascissa del suo punto di intersezione con l'asse x ; sarà:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Iterando n volte il procedimento si costruisce la successione $x_0, x_1, \dots, x_n$ che può quindi essere definita per ricorrenza dalla relazione:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \quad [3]$$

■ La successione [3] converge sempre alla soluzione?

È intuitivo che, nelle condizioni della fig. 1, la successione x_n tende (per difetto) alla radice α dell'equazione quando $n \rightarrow +\infty$. Non sempre tuttavia ciò accade: nella fig. 2 è rappresentata per esempio una situazione in cui la successione definita dalla [3] non risulta convergente ad α .

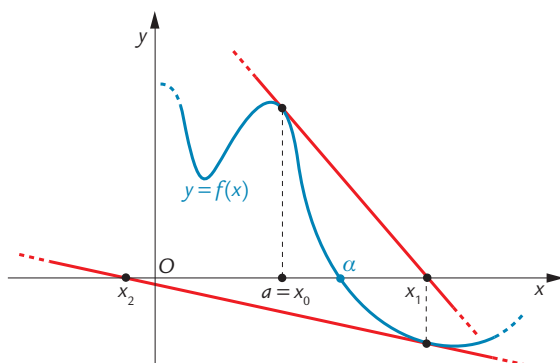


Figura 2 La successione definita per ricorrenza dalla [9.3], con punto iniziale a , nel caso rappresentato **non** converge ad α ; come puoi vedere, infatti, sia x_1 sia x_2 sono approssimazioni di α peggiori di a .

È importante allora stabilire delle condizioni che garantiscano la convergenza della successione [3] alla soluzione dell'equazione che vogliamo determinare; tali condizioni sono espresse dal seguente teorema, che ci limitiamo a enunciare.

Convergenza del metodo di Newton

TEOREMA 1

Sia f una funzione che soddisfa le seguenti proprietà:

- f è derivabile due volte nell'intervallo $[a, b]$, con derivate continue;
- f' ed f'' sono non nulle e di segno costante in $[a, b]$;
- $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette un'unica soluzione $\alpha \in [a, b]$ e inoltre:

- se $f(a) \cdot f''(a) > 0$, la successione definita dalla [9.3] con $x_0 = a$ converge ad α ;
- se $f(b) \cdot f''(b) > 0$, la successione definita dalla [9.3] con $x_0 = b$ converge ad α .

È importante fare alcune osservazioni.

- L'ipotesi **a.** è in pratica sempre soddisfatta nei casi di «ordinaria amministrazione» che prenderemo in considerazione.
- L'ipotesi **b.** richiede sostanzialmente che la funzione f sia monotona e convessa (o concava) nell'intervallo $[a, b]$.
- L'ipotesi **c.**, insieme alla **a.** e alla **b.**, garantiscono l'esistenza e l'unicità della soluzione nell'intervallo $[a, b]$: precisamente, l'esistenza segue dal teorema degli zeri (applicabile nell'intervallo $[a, b]$ poiché $f(a) \cdot f(b) < 0$ e inoltre f , dovendo essere derivabile in $[a, b]$, deve a maggior ragione essere continua in $[a, b]$), mentre l'unicità è garantita dall'ipotesi **b.**, che implica la monotonia della funzione f .

In pratica il teorema 1 si utilizza secondo i passi indicati qui di seguito.

SINTESI

Procedimento per applicare il metodo di Newton

- Si individua un intervallo $[a, b]$, cui appartiene la soluzione dell'equazione che vogliamo approssimare, in cui la funzione è monotona e convessa (o concava) e tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$;
- si valuta $f(a) \cdot f''(a)$: se è positivo si approssima la soluzione mediante la successione [3] in cui si prende $x_0 = a$, altrimenti si prende $x_0 = b$;
- calcolando un sufficiente numero di termini della successione, si approssima la soluzione con la precisione desiderata.

Rifletti

Il passo 2 del procedimento è giustificato dal teorema 1 sulla base della seguente osservazione: dovendo essere per ipotesi f'' di segno costante ed $f(a)$ e $f(b)$ discordi, se $f(a)f''(a)$ non è positivo, allora necessariamente sarà positivo $f(b)f''(b)$.

ESEMPIO Approssimazione delle soluzioni di una equazione con il metodo di Newton

Dimostriamo che l'equazione $x^3 + x - 4 = 0$ ha una sola soluzione e determiniamo un'approssimazione con il metodo di Newton.

- Localizziamo la soluzione**

Studiamo brevemente la funzione $y = f(x) = x^3 + x - 4$.

Abbiamo:

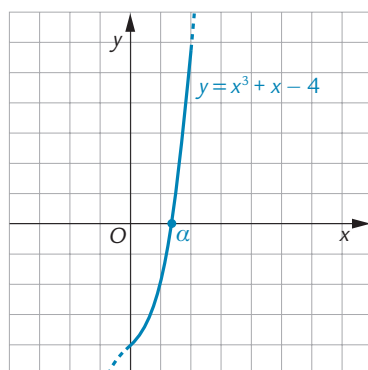
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{quindi } f \text{ è strettamente crescente in } \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 6x$$

Da quest'ultima uguaglianza si ricava che f è concava in $(-\infty, 0]$, convessa in $[0, +\infty)$ e $x = 0$ è un punto di flesso.

Queste informazioni consentono di tracciare il grafico in figura, da cui si intuisce che l'equazione $f(x) = 0$ ammette un'unica soluzione α nell'intervallo $[1, 2]$.



In effetti:

f è continua nell'intervallo $[1, 2]$

$$f(1) = -2, f(2) = 6$$

quindi, per il teorema degli zeri, esiste una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ in $[1, 2]$; inoltre f è strettamente crescente in $[1, 2]$ perciò la soluzione è unica.

- Determiniamo la successione che approssima la soluzione**

I risultati ottenuti nel punto precedente garantiscono che nell'intervallo $[1, 2]$ sono soddisfatte le ipotesi per poter applicare il teorema 1.

Osserviamo che, essendo $f(1) = -2$ e $f''(1) = 6$, risulta $f(1) \cdot f''(1) < 0$, pertanto dobbiamo scrivere la successione partendo da $x_0 = 2$.

$$x_0 = 2, x_{n+1} = x_n - \frac{\overbrace{x_n^3 + x_n - 4}^{f(x_n)}}{\underbrace{3x_n^2 + 1}_{f'(x_n)}} \quad f'(x) = 3x^2 + 1, \text{ quindi } f'(x_n) = 3x_n^2 + 1$$

- Determiniamo alcune approssimazioni**

Con l'aiuto di un calcolatore si ottiene:

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 + x_0 - 4}{3x_0^2 + 1} = 2 - \frac{2^3 + 2 - 4}{3 \cdot 2^2 + 1} = \frac{20}{13} = 1,538461538....$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 + x_1 - 4}{3x_1^2 + 1} \simeq 1,392819014.....$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 + x_2 - 4}{3x_2^2 + 1} \simeq 1,378916766.....$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^3 + x_3 - 4}{3x_3^2 + 1} \simeq 1,378796709.....$$

$$x_5 = x_4 - \frac{x_4^3 + x_4 - 4}{3x_4^2 + 1} \simeq 1,378796700.....$$

Dopo cinque iterazioni le prime *otto* cifre dopo la virgola si stabilizzano, quindi possiamo dire che soluzione α , con otto cifre decimali esatte, è $\alpha = 1,37879670.....$

Rifletti

Nell'esempio qui a fianco si è ottenuto un «buon» risultato (otto cifre decimali esatte) dopo solo cinque iterazioni. Ciò mostra che il metodo di Newton converge rapidamente alla soluzione: addirittura si potrebbe dimostrare che se la successione $[x_n]$ parte da un punto «sufficientemente vicino» ad α , l'errore $|x_n - \alpha|$ decresce, al crescere di n , con velocità più che esponenziale!