La formula di Taylor

La formula di Taylor

In questa scheda approfondiamo il problema dell'*approssimazione locale* di una funzione. Sappiamo che, data una funzione f derivabile in x_0, il grafico della funzione in un intorno di x_0 può essere approssimato da quello della *retta tangente* nel punto x_0. Il problema che ci poniamo ora è quello di cercare funzioni che approssimino la funzione f in prossimità di x_0 con una precisione migliore rispetto alla retta tangente.
L'idea è quella di «sostituire» la retta tangente con un polinomio di grado diciamo n, che abbia tutte le derivate fino all'ordine n uguali a quelle di f nel punto $x = x_0$.
Si dimostra che un tale polinomio esiste sempre ed è unico, a patto che la funzione f che si vuole approssimare sia derivabile n volte in x_0. Precisamente vale il seguente teorema:

Polinomio di Taylor — **TEOREMA 1**

Data una funzione f, derivabile n volte in $x = x_0$, esiste uno e un solo polinomio $T_n(x)$ di grado minore o uguale a n, tale che:

$$T_n(x_0) = f(x_0),\ T_n'(x_0) = f'(x_0),\ \ldots,\ T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Questo polinomio, detto di **Taylor di ordine n**, è espresso dalla formula:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Un caso particolarmente importante è quello in cui $x_0 = 0$. In tal caso il polinomio di Taylor viene detto **polinomio di Maclaurin** della funzione f e la sua espressione è semplicemente:

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ESEMPIO Polinomi di Maclaurin di funzioni notevoli

Determiniamo il polinomio di Maclaurin per le funzioni

a. $f(x) = e^x$ **b.** $f(x) = \sin x$

a. Essendo $f^{(n)}(x) = e^x$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ con $n \geq 1$, si ha $f^{(n)}(0) = 1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, quindi il polinomio di Maclaurin di $f(x) = e^x$ è dato da:

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

b. Osserviamo che:

$$f(x) = \sin x,\quad f'(x) = \cos x,\quad f''(x) = -\sin x,\quad f'''(x) = -\cos x$$

poi il ciclo si ripete:

$$f^{(4)}(x) = \sin x,\quad f^{(5)}(x) = \cos x,\quad f^{(6)}(x) = -\sin x,\quad f^{(7)}(x) = -\cos x,\ \ldots$$

In generale se ne deduce che:

$$f^{(2n)}(0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}$$

Quindi il polinomio di Maclaurin di $f(x) = \sin x$ è dato da:

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n =$$

$$= 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 +$$

$$+ \frac{0}{6!}x^6 + \frac{-1}{7!}x^7 + \ldots\ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Procedendo come negli ultimi due esempi si possono ricavare i polinomi di Maclaurin delle funzioni notevoli riportate in tabella.

Funzione	Polinomio di Maclaurin
$f(x) = e^x$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}$
$f(x) = \sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$f(x) = \cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2k)!}$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

La formula di Taylor con resto secondo Peano e relative applicazioni

Definito il polinomio di Taylor, un problema fondamentale che si pone è quello di valutare l'*errore* che si commette quando si sostituisce $f(x)$ con $T_n(x)$; il problema è cioè quello di valutare la quantità:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

detta **resto *n*-esimo (o errore di approssimazione)**. Un primo importante risultato sul resto $R_n(x)$ è espresso dal seguente teorema.

Resto secondo Peano — **TEOREMA 2**

Sia f derivabile n volte in x_0 e $T_n(x)$ il polinomio di Taylor di ordine n della funzione f con centro in x_0. Posto $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, il resto $R_n(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $(x-x_0)^n$ per $x \to x_0$, ossia:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \qquad [1]$$

Per esprimere sinteticamente la [1] si utilizza solitamente la scrittura:

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n) \text{ per } x \to x_0 \qquad [2]$$

che si legge «$R_n(x)$ è *o-piccolo* di $(x-x_0)^n$ per $x \to x_0$».
Tenendo conto che $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ e utilizzando la [2], possiamo scrivere la cosiddetta **formula di Taylor di f (centrata in x_0 e di ordine n) con il resto secondo Peano:**

$$f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n) \text{ per } x \to x_0 \qquad [3]$$

Questa formula, che intuitivamente costituisce una «radiografia» del comportamento della funzione f in prossimità di x_0, ha importanti conseguenze. Ci limitiamo a gettare uno sguardo sulla sua applicazione nella risoluzione delle forme di indecisione. Nel calcolo di un limite $x \to x_0$ è possibile sostituire infatti alla funzione il suo sviluppo di Taylor centrato in x_0 di un ordine conveniente. Ci limiteremo a considerare limiti per $x \to 0$ e quindi a utilizzare i polinomi di Maclaurin delle funzioni notevoli in tabella.

Attenzione!

Per applicare la formula di Maclaurin nel calcolo dei limiti, è utile tenere presente le seguenti considerazioni:

1. In generale lÀa scrittura $o(x^n)$ indica una funzione che, divisa per x^n, tende a 0 per $x \to x_0$. Per esempio $o(x^3)$ indica una funzione che divisa per x^3 tende a 0 per $x \to 0$. Dunque risulta $\lim\limits_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$ *per definizione* del simbolo o-piccolo.
2. In generale potremo dire che $\frac{o(x^n)}{x^m} \to 0$ per $x \to 0$ se $m \le n$, mentre se $m > n$ non potremo stabilire a cosa tende il rapporto $\frac{o(x^n)}{x^m}$ per $x \to 0$. Per esempio, possiamo dire che $\lim\limits_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^2} = 0$ poiché possiamo scrivere $\lim\limits_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} \cdot x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} \cdot \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \cdot 0 = 0$

Non possiamo stabilire invece a cosa tende $\frac{o(x^3)}{x^4}$ per $x \to 0$; infatti, scrivendo

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\frac{o(x^3)}{x^3}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to \infty}$ siamo condotti alla forma indeterminata $0 \cdot \infty$.

ESEMPIO **Calcolo di un limite con l'utilizzo della formula di Maclaurin**

Calcoliamo: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Utilizziamo la formula di Maclaurin della funzione seno del terzo ordine:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{3!} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = -\frac{1}{3}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che $\lim\limits_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$ per definizione di o-piccolo.

Attenzione!

Se avessimo considerato il polinomio di Maclaurin arrestato al *primo* ordine, cioè $\sin x = x + o(x)$, avremmo ottenuto $\lim\limits_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^3}$. A questo punto però sappiamo solo (per definizione di o-piccolo) che il numeratore tende a 0 se diviso per x; nulla possiamo dedurre del suo comportamento quando viene diviso per x^3 e quindi non possiamo concludere. Lo sviluppo del seno al primo ordine non è quindi sufficiente per il calcolo del limite.