

Attività guidate

Attività 1 Foglio elettronico

L'approssimazione di un integrale definito con il metodo dei rettangoli

Esistono alcune funzioni la cui primitiva **non** è calcolabile con i metodi che abbiamo visto nel volume. Per calcolare l'integrale definito di una funzione di questo tipo, per esempio per calcolare:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

non è possibile perciò avvalersi del teorema fondamentale del calcolo integrale; si ricorre allora a dei metodi approssimati. Uno dei metodi più semplici è il cosiddetto *metodo dei rettangoli*. Lo illustriamo e ti guidiamo a costruire un foglio Excel che applica tale metodo.

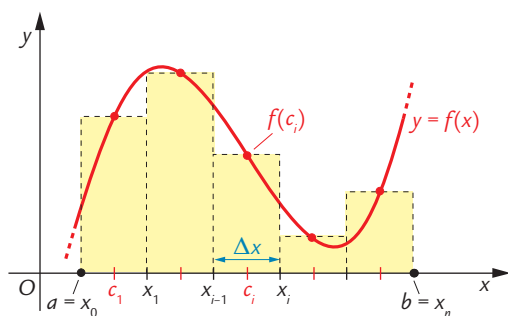
A. IL METODO DEI RETTANGOLI

Supponiamo che f sia una funzione continua e positiva nell'intervallo $[a, b]$ e proponiamoci di determinare un'approssimazione dell'integrale $\int_a^b f(x) dx$.

Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n intervallini di ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
Gli estremi degli intervallini sono:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad \dots, \quad x_n = b$$

Detto c_i il punto medio dell'intervallino $[x_{i-1}, x_i]$, il modo più elementare di approssimare l'integrale definito della funzione f nell'intervallo $[a, b]$ è quello di approssimare l'area del trapezoide che esso rappresenta con la somma delle aree dei rettangoli di base Δx e altezze $f(c_i)$.



Si giunge così alla formula seguente, valida anche per funzioni di segno qualunque.

IL METODO DEI RETTANGOLI

Sia f una funzione continua in $[a, b]$. Vale la seguente formula di approssimazione:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \Delta x [f(c_1) + f(c_2) + \dots + f(c_n)] \quad [1]$$

dove:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{punto medio di } [x_{i-1}, x_i] \text{ e } x_i = a + i \Delta x.$$

Risorse digitali

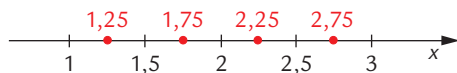
Se hai difficoltà a svolgere le attività guidate, fai riferimento ai file di Excel disponibili.

B. UN ESEMPIO DI APPROSSIMAZIONE DI UN INTEGRALE CON IL METODO DEI RETTANGOLI

Approssimiamo $\int_1^3 e^{-x^2} dx$ con il metodo dei rettangoli, applicato con $n = 4$.

1. Dividiamo l'intervallo $[1, 3]$ in 4 intervallini di ampiezza $\Delta x = \frac{3-1}{4} = 0,5$.

Gli estremi degli intervallini e i loro punti medi sono rappresentati nella figura qui sotto.



2. Utilizzando i punti medi (colorati in rosso) otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_1^3 e^{-x^2} dx &\simeq 0,5 \cdot [f(\underbrace{1,25}_{\Delta x, c_1}) + f(\underbrace{1,75}_{c_2}) + f(\underbrace{2,25}_{c_3}) + f(\underbrace{2,75}_{c_4})] = \text{Formula [1]} \\ &= 0,5 \cdot [e^{-(1,25)^2} + e^{-(1,75)^2} + e^{-(2,25)^2} + e^{-(2,75)^2}] \simeq 0,13 \end{aligned}$$

C. COSTRUZIONE DEL FOGLIO EXCEL

Costruisci ora un foglio Excel, impostato come quello che puoi vedere qui sotto, che applica il metodo dei rettangoli per approssimare un integrale del tipo $\int_a^b e^{-x^2} dx$. Osserva che:

- le celle **B2** e **B3** sono preposte all'immissione degli estremi a e b dell'intervallo di integrazione;
- la cella **D2** è preposta all'immissione del numero di suddivisioni n dell'intervallo che si vuole considerare;
- la zona **A6:E9** serve a effettuare i calcoli preliminari necessari per applicare la formula [1];
- nella cella **E14** è fornita l'approssimazione dell'integrale.

Il foglio costruito riguarda il caso in cui si è scelto $n = 4$.

	A	B	C	D	E
1	Metodo dei rettangoli				
2	a =	1	suddivisioni n =		
3	b =	3			
4					
5	i	x_{i-1}	x_i	c_i	$f(c_i)$
6	1	1	1,5	1,25	0,209611
7	2	1,5	2	1,75	0,046771
8	3	2	2,5	2,25	0,006330
9	4	2,5	3	2,75	0,000520
10					
11					
12					
13					
14	Valore approssimato dell'integrale=				0,13161565

Per costruire tale foglio devi in particolare:

1. immettere nella cella **A6** il valore **1**;

2. immettere nella cella **B6** la formula Excel che traduce la formula $x_{i-1} = a + (i-1) \Delta x$, essendo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
3. immettere nella cella **C6** la formula Excel che traduce l'analoga formula $x_i = a + i \Delta x$;
4. immettere nella cella **D6** la formula che calcola il punto medio dell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$;
5. immettere nella cella **E6** la formula che calcola il valore della funzione $f(x) = e^{-x^2}$ in c_i , nel nostro caso:
`=EXP ( - ( D6^2 ) )`
6. immettere nella cella **A7** la formula `= A6+1`;
7. copiare sulla riga **7** le celle della zona **B6:E6**;
8. copiare la riga **7** nelle due righe sottostanti (in modo da giungere fino al valore $i = 4$, in accordo con la scelta di 4 suddivisioni);
9. immettere nella cella **E14** la formula che traduce la formula [1].

Ritroverai così il valore approssimato dell'integrale, già ricavato nello svolgimento dell'esercizio senza il foglio Excel.

D. UTILIZZO DEL FOGLIO

Modifica il foglio in modo da ottenere un'approssimazione dell'integrale $\int_2^6 e^{-x^2} dx$ con il metodo dei rettangoli applicato con una suddivisione dell'intervallo $[2, 6]$ in 10 parti.

Attività proposte

Considera l'integrale $\int_1^2 \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right) dx$.

- a. Calcola il valore esatto dell'integrale e arrotondalo alla seconda cifra decimale.
- b. Modifica il foglio costruito nell'attività guidata, in modo da calcolare un'approssimazione dell'integrale $\int_1^2 \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right) dx$ con il metodo dei rettangoli applicato con una suddivisione dell'intervallo $[1, 2]$ in 10 parti.
- c. Confronta i due risultati trovati e verifica la correttezza del risultato trovato in a.